# SUR LES NOMBRES DE SEGNER (*)

Par M. **Eugène Catalan**, à Liége

*(Seduta del 19 dicembre 1886)*

---

## I. Introduction.

1. Divers Géomètres se sont occupés de ce problème : *De combien de manières un polygone convexe, de n côtés, peut-il être décomposé en triangles, au moyen de diagonales ?* (**)

Soit $T_n$ le nombre des décompositions. On sait que

$$T_4 = 2,\ \ T_5 = 5,\ \ T_6 = 14,\ \ T_7 = 42,\ \dots$$

Les nombres $T_n$, considérés par Segner (***), satisfont aux relations

$$T_{n+1} = T_2 T_n + T_3 T_{n-1} + \dots + T_{n-1} T_3 + T_n T_2 \text{ (****)}, \qquad (1)$$

$$T_{n+1} = \frac{4n-6}{n} T_n \qquad (2)$$

$$T_n - C_{n-1,1}\, T_{n-1} + C_{n-2,2}\, T_{n-2} - \dots = 0 \text{ (*****)}. \qquad (3)$$

---

(*) Les résultats principaux démontrés dans le petit Mémoire suivant ont été communiqués, au Congrès de Nancy, août 1886. En outre, une partie des onze premiers paragraphes se trouve dans le tome II des *Mélanges mathématiques.*

*Liége, 23 mars 1887.*
E. C.

(**) *Journal de Liouville*, t. III et IV.

(***) *Ibid.* tome III, p. 505.

(****) On suppose $T_2 = T_3 = 1$.

(*****) J'ai donné celle-ci en 1839.

De plus, comme l'a trouvé Binet (*), la *fonction génératrice* de $T_n$ est $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$; c'est-à-dire que

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + T_3 x + T_4 x^2 + \ldots + T_{n+2} x^n + \ldots \qquad (4)$$

2. De la formule (2), on déduit d'abord celle-ci:

$$T_{n+1} = \frac{2.6.10\ldots\overline{4n-6}}{2.3.4\ldots\ n}; \qquad (5)$$

puis, en observant que

$$2.6.10\ldots\overline{4n-6} = n(n+1)\ldots(2n-2): \qquad (6)$$

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}; \qquad (7)$$

ou encore:

$$nT_{n+1} = C_{2n-2,\,n-1} \qquad (8)$$

3. Dans l'égalité (4), changeons $x$ en $x^2$, puis $x$ en $\frac{x}{2}$. Nous aurons

$$2\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \sum_0^\infty T_{n+2}\,\frac{x^{2n}}{4^n},$$

ou

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \sum_0^\infty T_{n+2}\,\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}} \text{ (**)} \qquad (9)$$

4. D'après la génération des *Nombres de Segner*, ils doivent se

(*) *Journal de Liouville*, tome IV, p. 85.

(**) De là résulte, en passant, cette proposition connue :

*Dans le développement de* $(1+z)^{\frac{1}{2}}$, *les coefficients sont réductibles à la forme* $\frac{N}{2^k}$.

rencontrer dans les séries qui proviennent de la formule du binôme. Par exemple, comme

$$\text{arc sin } x = \sum_0^\infty \frac{1.3.5 \ldots \overline{2n-1}}{2.4.6 \ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

ou

$$\text{arc sin } x = \sum_0^\infty \frac{2.6.10 \ldots \overline{4n-2}}{1.2.3 \ldots n} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)},$$

on peut écrire:

$$\text{arc sin } x = \sum_0^\infty \frac{n+1}{2n+1} T_{n+2} \frac{x^{2n+1}}{4^n}. \tag{10}$$

5. Soit

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ arc sin } x; \tag{11}$$

et, par conséquent,

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ arc sin } x. \tag{12}$$

Il est très facile, non-seulement de développer la fonction $y$, mais encore de trouver une nouvelle relation entre les Nombres de Segner.

Posons, en effet,

$$y = \sum_0^\infty A_n x^{2n+1}, \tag{13}$$

ou

$$y' = \sum_0^\infty (2n+1) A_n x^{2n}. \tag{14}$$

Des relations (11), (12), on conclut

$$\frac{y}{y'-1} = -\frac{1-x^2}{x};$$

puis, à cause de $A_0 = 1$:

$$1 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots + A_n x^{2n} + \ldots$$

$$+(1-x^2)\left[3A_1 + 5A_2 x^2 + 7A_3 x^4 + \ldots + (2n+1)A_n x^{2n-2} + \ldots\right] = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de $x^{2n}$, on obtient

$$A_n = -\frac{2.4.6 \ldots (2n-2)}{3.5.7 \ldots (2n+1)};$$

et, par l'emploi des relations (8) et (2):

$$A_n = -\frac{2^{2n-1}}{n(n+1)(2n+1)} \frac{1}{T_{n+2}}. \tag{15}$$

Dans le produit des fonctions (9), (10), le coefficient de $x^{2n+1}$ est

$$\frac{n+1}{(2n+1)4^n} T_{n+2}$$

$$-\frac{1}{2^{2n-1}}\left[T_2 T_{n+1} + \frac{2}{3} T_3 T_n + \frac{3}{5} T_4 T_{n-1} + \ldots + \frac{n}{2n-1} T_{n+1} T_2\right],$$

ou

$$\frac{2n-1}{(2n+1)2^{2n-1}} T_{n+1}$$

$$-\frac{1}{2^{2n-1}}\left[T_2 T_{n+1} + \frac{2}{3} T_3 T_n + \frac{3}{5} T_4 T_{n-1} + \ldots + \frac{n}{2n-1} T_{n+1} T_2\right].$$

Ce coefficient égale aussi $A_n$. Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned} &T_2 T_{n+1} + \frac{2}{3} T_3 T_n + \frac{3}{5} T_4 T_{n-1} + \ldots + \frac{n}{2n-1} T_{n+1} T_2 \\ &\quad = \frac{2n-1}{2n+1} T_{n+1} + \frac{4^{2n-1}}{n(n+1)(2n+1)} \frac{1}{T_{n+2}}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Telle est la relation annoncée. (*)

(*) En la combinant avec l'égalité (1), on la simplifie un peu.

6. La méthode précédente est susceptible de généralisation. Je trouve, par exemple,

$$\int_0^1 dx\sqrt{1-x^4}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$
$$=1+\frac{1}{5.9}\,\frac{4}{5}+\sum_3^\infty\frac{7.11.15\,\ldots\,\overline{4n-5}}{5.9.13\,\ldots\,\overline{4n+1}}\,\frac{4n-4}{2n+1};$$

ou, après quelques transformations simples :

$$\frac{1}{3}\left[F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]^2=\frac{229}{225}+4\sum_3^\infty\frac{7.11.15\,\ldots\,\overline{4n-5}}{5.\,9.13\,\ldots\,\overline{4n+1}}\,\frac{n-1}{2n+1}.\quad(17)$$

7. D'après la formule de Lagrange, appliquée a l'équation

$$y=a+\frac{x}{y}:\quad(18)$$

$$y^{-k}=a^{-k}-\frac{k}{1}a^{-k-2}x+\frac{k(k+3)}{1.2}a^{-k-4}x^2-\frac{k(k+4)(k+5)}{1.2.3}a^{-k-6}x^3+\ldots\,(^*)$$

Si l'on suppose $a=2$, et que l'on change $x$ en $-4x$, on a, par l'équation (18) :

$$y=1+\sqrt{1-4x},\qquad\frac{1}{y}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{4x},$$
$$y^{-k}=\frac{1}{2^k}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k;$$

puis, par la formule (4) :

$$y^{-k}=\frac{1}{2^k}\left[1+T_3x+T_4x^2+T_5x^3+\ldots\right]^k;$$

et enfin

$$\left[1+T_3x+T_4x^2+T_5x^3+\ldots\right]^k$$
$$=1+\frac{k}{1}x+\frac{k(k+3)}{1.2}x^2+\frac{k(k+4)(k+5)}{1.2.3}x^3+\ldots\quad(19)$$

(*) Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 320.

8. Dans le second membre, le coefficient de $x^n$ est

$$\frac{k(k+n+1)(k+n+2)\ldots(k+2n-1)}{1.2.3\ldots n} = C_{k+2n-1,n} - C_{k+2n-1,n-1}.$$

Par conséquent :

*Si*

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda = k+n, \tag{20}$$

*on a*

$$\sum T_{\alpha+1} T_{\beta+1} \ldots T_{\lambda+1} = C_{k+2n-1,n} - C_{k+2n-1,n-1} \text{ (*)} \tag{21}$$

9. Le petit Mémoire intitulé : *Sur un développement de l'intégrale elliptique, de première espèce* (**), contient les relations suivantes :

$$P_n = 2^{n+2}\Big[(2n-1)^2 T_{n+1}^2 - 4\frac{n-1}{1}(2n-3)^2 T_n^2$$

$$+ 4^2 \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2n-5)^2 T_{n-1}^2 - \ldots\Big],$$

$$n^2 P_n - 8(3n^2-3n+1)P_{n-1} + 128(n-1)^2 P_{n-2} = 0 \text{ (***)}.$$

Il en résulte, évidemment, une *équation du premier degré, entre les carrés des nombres de Segner*. Pour le moment, je ne puis m'en occuper.

---

(*) Le nombre des termes, dans le premier membre, est celui des solutions, entières et positives, de l'équation (20), laquelle renferme $k$ inconnues. On sait que ce nombre égale $C_{k+n-1,n}$.

(**) *Académie de Belgique,* 10 *octobre* 1885.

(***) Les nombres *entiers* $P_1$, $P_2$, $P_3$, .... que M. de Jonquières a bien voulu calculer, ont les valeurs suivantes :

$$P_1 = 8,\ P_2 = 80,\ P_3 = 896,\ P_4 = 10\,816,\ \ldots.$$

## II. Propriétés des nombres de Segner

10. D'après la relation

$$T_{n+1} = \frac{4n-6}{n} T_n,$$

ou

$$T_n = \frac{4n-10}{n-1} T_{n-1}:$$

1° *Si $n$ est premier avec 6, $T_n = \mathcal{M}(n)$.*

2° *Si $n-1$ est premier avec 6, $T_n = \mathcal{M}(4n-10)$.*

3° *Si $T_n$ est divisible par un nombre premier $p$, supérieur à 5, sans que $T_{n-1}$ le soit, $p$ divise $2n-5$.*

4° *Aucun facteur premier, de $T_n$, ne surpasse $2n-5$.*

5° *La plus petite valeur de $n$, qui rende $2n-5$ divisible par $p$, est*

$$\frac{1}{2}(p+5).$$

6° *On a*

$$T_p = \mathcal{M}(p),$$

*mais non $\mathcal{M}(p^2)$.*

7° *Soit $p$ un nombre premier, supérieur à 5. Dans la suite $T_4, T_5, \ldots, T_n$, il y a toujours $\frac{p-3}{2}$ termes consécutifs divisibles, une seule fois, par $p$. L'indice du premier de ces termes est $\frac{1}{2}(p+5)$; l'indice du dernier est $p$.*

Autrement dit:

*$T_p$, et les $\frac{p-5}{2}$ termes qui précèdent $T_p$, sont divisibles par $p$, mais non divisibles par $p^2$.*

8° *Les nombres de Segner, prolongés suffisamment, contiennent, comme facteurs, tous les nombres premiers* (*).

---

(*) Les démonstrations sont fort simples. Pour abréger, nous les omettons.

11. Soit $i$ le nombre des termes *impairs* compris dans la suite

$$E\left(\frac{n-2}{1}\right),\ E\left(\frac{n-2}{2}\right),\ E\left(\frac{n-2}{4}\right),\ E\left(\frac{n-2}{8}\right),\ \ldots$$

1° *Si $n$ est pair, $T_n$ est divisible par $2^i$.*
2° *Si $n$ est impair, et égal à $2^\alpha n' + 1$, $T_n$ est divisible par $2^{i-\alpha}$.* (*).

12. On sait, et il est facile de démontrer que

$$C_{2n,n} = \mathcal{M}(2n-1).$$

Or, $C_{2n,n} = (n+1)\,T_{n+2}$. Donc

$$(n+1)\,T_{n+2} = \mathcal{M}(2n-1), \quad \text{ou} \quad (n-1)T_n = \mathcal{M}(2n-5).$$

La discussion de cette égalité conduit à la proposition suivante :

*Lorsque* $n = 3\mu + 1$, $T_n = \mathcal{M}\left(\frac{2n-5}{3}\right)$. *Dans les cas contraires,* $T_n = \mathcal{M}\,(2n-5)$.

13. Théorème. — *Dans la suite $T_4$, $T_5$, ... ,$T_n$, $T_{n+1}$, ... deux termes consécutifs ne sont pas composés des mêmes facteurs premiers.*

Cette propriété résulte de l'égalité (2), combinée avec un Lemme presque évident (**).

(*) Cette proposition résulte de l'égalité (8), combinée avec le théorème suivant : *$s$ étant le nombre des termes impairs compris dans la suite*

$$E\left(\frac{n}{1}\right),\ E\left(\frac{n}{2}\right),\ E\left(\frac{n}{4}\right),\ E\left(\frac{n}{8}\right),\ \ldots$$

*$C_{2n,n}$ est divisible par $2^s$, et le quotient est impair* (*Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 65).

De plus,

$$i \mathrel{\overline{\overline{>}}} \alpha.$$

(**) *Si deux fractions équivalentes ont leurs dénominateurs premiers entre eux :*
1° *Ces fractions se réduisent à un nombre entier;*
2° *Leurs numérateurs ne sont pas composés des mêmes facteurs premiers.*

## III. TABLE DES NOMBRES DE SEGNER (*).

| $n$ | $T_n$ |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 6 | 2.7 |
| 7 | 2.3.7 |
| 8 | $2^2.3.11$ |
| 9 | 3.11.13 |
| 10 | 2.5.11.13 |
| 11 | 2.11.13.17 |
| 12 | $2^2.13.17.19$ |
| 13 | 2.7.13.17.19 |
| 14 | $2^2.7.17.19.23$ |
| 15 | $2^2.5^2.17.19.23$ |
| 16 | $2^3.3^2.5.17.19.23$ |
| 17 | $3^2.5.17.19.23.29$ |
| 18 | $2.3^2.5.19.23.29.31$ |
| 19 | 2.3.5.11.19.23.29.31 |
| 20 | $2^2.3.5^2.7.11.23.29.31$ |
| 21 | 2.3.5.7.11.23.29.31.37 |
| 22 | $2^2.3.5.11.13.23.29.31.37$ |
| 23 | $2^2.3^2.5^2.13.23.29.31.37.41$ |
| .. | .................. |

## IV. DES GROUPES RELATIFS À UN NOMBRE PREMIER.

14. Soit, comme ci-dessus (9, 7°), $p$ un nombre premier, supérieur à 5. On a vu que :

*Si $T_n$ est divisible par $p$, sans que $T_{n-1}$ le soit, $p$ divise $2n-5$.*

Les termes

$$T_{\frac{p+5}{2}}, \quad T_{\frac{p+7}{2}}, \ldots, \; T_p,$$

(*) Elle peut servir à vérifier les propriétés énoncées dans le paragraphe II.

tous divisibles par $p$, constituent ce que l'on peut appeler : *le premier groupe relatif au nombre p.*

Après $2n - 5 = p$, on peut prendre

$$2n - 5 = 3p, \quad 2n - 5 = 5p, \ \dots ,$$

ou

$$n = \frac{3p+5}{2}, \quad n = \frac{5p+5}{2}, \quad n = \frac{7p+5}{2}, \dots .$$

De ces valeurs résultent une infinité d'autres groupes relatifs à $p$; savoir :

$$\begin{array}{lll} T_{\frac{3p+5}{2}}, & T_{\frac{3p+7}{2}}, & \dots, T_{2p}; \\ T_{\frac{5p+5}{2}}, & T_{\frac{5p+7}{2}}, & \dots, T_{3p}; \\ T_{\frac{7p+5}{2}}, & T_{\frac{7p+7}{2}}, & \dots, T_{4p}; \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

*Les Nombres de Segner, compris dans ces groupes, sont les seuls qui soient divisibles par p.* (*)

Par exemple, *les groupes relatifs à* 11 sont :

$$\begin{array}{llll} T_8, & T_9, & T_{10}, & T_{11}; \\ T_{19}, & T_{20}, & T_{21}, & T_{22}; \\ T_{30}, & T_{31}, & T_{32}, & T_{33}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Ils comprennent tous les Nombres de Segner, multiples de 11.

15. Supposons que, $n$ étant donné, $p$ soit un diviseur premier de $T_n$, inconnu. Le nombre $T_n$ appartient à quelqu'un des groupes considérés ci-dessus.

---

(*) On reconnait aisément que :

1° les groupes n'*empiètent* pas les uns sur les autres;

2° $T_{p+1}$, $T_{2p+1}$, $T_{3p+1}$, ... *ne sont pas divisibles par p.*

Cela posé:

Si $T_n$ appartient au premier groupe, $n$ est compris entre $\frac{p+5}{2}$ et $p$, inclusivement;

Si $T_n$ appartient au deuxième groupe, $n$ est compris entre $\frac{3p+5}{2}$ et $2p$, inclusivement;

Si $T_n$ appartient au troisième groupe, $n$ est compris entre $\frac{5p+5}{2}$ et $3p$ inclusivement;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Les valeurs de $p$ sont donc déterminées par les relations suivantes:

$$n \leqq p \leqq 2n-5,$$

$$\frac{n}{2} \leqq p \leqq \frac{2n-5}{3},$$

$$\frac{n}{3} \leqq p \leqq \frac{2n-5}{5},$$

. . . . . . . . . . . . . .

De plus, *tous les nombres premiers, $p$, qui y satisfont, divisent* $T_n$.
Soit, par exemple, $n = 23$, auquel cas :

$$23 \leqq p \leqq 41, \qquad 11 < p < 14;$$

et, par conséquent,

$$p = 23, \ p = 29, \ p = 31, \ p = 37, \ p = 41, \ p = 13.$$

En effet, $T_{23}$ *appartient au premier groupe relatif à* 23, 29, 31, 37, 41 *et au deuxième groupe relatif à* 13.

16. Soit $p$ un nombre premier, supérieur à $n$. *S'il divise* $T_n$, on a

$$n < p \leqq 2n-5;$$

car les relations

$$p < \frac{2n-5}{3}, \quad p < \frac{2n-5}{5}, \ldots$$

sont impossibles.

On est donc conduit à la proposition suivante qui ne diffère pas, au fond, du celèbre *postulatum* de M. Bertrand :

*Entre un nombre entier, supérieur à* 5, *et son double diminué de* 5, *il y a, au moins, un nombre premier.*

Très probablement, la démonstration rigoureuse doit être fort simple; mais, jusqu'à présent, je n'ai pu la trouver.

Paris, 11 décembre 1886.

E. Catalan.