

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

CATALAN, E.

Note sur une Équation aux différences finies.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 3 (1838), p. 508-516.

http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1838_1_3_A40_0



Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par la Cellule MathDoc
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>

Note sur une Équation aux différences finies ;

PAR E. CATALAN.

M. Lamé a démontré que l'équation

$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \dots + P_4P_{n-4} + P_3P_{n-1} + P_2,$ (1)
se ramène à l'équation linéaire très simple,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n. \quad (2)$$

Admettant donc la concordance de ces deux formules, je vais chercher à en déduire quelques conséquences.

I.

L'intégrale de l'équation (2) est

$$P_{n+1} = \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \dots \frac{4n-6}{n} P_3;$$

et comme, dans la question de géométrie qui conduit à ces deux équations, on a $P_3 = 1$, nous prendrons simplement

$$P_{n+1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \dots (4n-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n}. \quad (3)$$

Le numérateur

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \dots (4n-6) &= 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) \\ &= \frac{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$P_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (2n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}. \quad (4)$$

Si l'on désigne généralement par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p ; et si l'on change n en $n + 1$, on aura

$$P_{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n,n}, \quad (5)$$

ou bien

$$P_{n+1} = C_{2n,n} - C_{2n,n-1}. \quad (6)$$

II.

Les équations (1) et (5) donnent ce théorème sur les combinaisons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n+1} C_{2n,n} &= \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1} C_{2n-4,n-2} \times \frac{1}{2} C_{2,1} \\ &+ \frac{1}{n-2} C_{2n-6,n-3} \times \frac{1}{3} C_{4,2} + \dots + \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

III.

On sait que le $(n + 1)^e$ nombre figuré de l'ordre $n + 1$, a pour expression, $C_{2n,n}$: si donc, dans la table des nombres figurés, on prend ceux qui occupent la diagonale; savoir :

$$1, 2, 6, 20, 70, 252, 924 \dots;$$

qu'on les divise respectivement par

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots;$$

on obtiendra une nouvelle suite de nombres,

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132 \dots, \quad (A)$$

lesquels jouiront de cette propriété :

Un terme quelconque de la suite (A) est égal à la somme des produits que l'on obtient en écrivant au-dessous d'elle-même, et dans un ordre inverse, la série des termes précédents, et en multipliant les termes correspondants des deux séries.

Par exemple,

$$132 = 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1.$$

Les nombres qui composent cette suite, sont à commencer du second, les valeurs de P_3, P_4, \dots

IV.

En mettant pour les quantités C , leurs valeurs dans l'équation (7), il vient

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n}{1} \cdot \frac{2n-1}{2} \dots \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n-2}{1} \cdot \frac{2n-3}{2} \dots \frac{n}{n-1} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{2n-4}{1} \cdot \frac{2n-5}{2} \dots \frac{n-1}{n-2} \\ \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{2n-6}{1} \dots \frac{n-2}{n-3} \times \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{2n-2}{1} \cdot \frac{2n-3}{2} \dots \frac{n}{n-1}.$$

Et en multipliant les deux membres par $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$:

$$\overline{n \cdot 2n-1 \dots n+2} = \overline{2n-2 \cdot 2n-3 \dots n} + \frac{n}{1} \cdot \overline{2n-4 \dots n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \overline{2n-6} \\ \dots \overline{n-2} \times 4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \overline{2n-8} \dots \overline{n-3} \times 6 \cdot 5 + \dots + \overline{2n-2} \dots n. \quad (8)$$

Dans ce développement, le terme qui en a i avant lui, a pour expression,

$$T_i = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} (2n-2i-2)(2n-2i-3) \dots (n-i) \times 2i(2i-1) \dots (i+2). \quad (9)$$

Cette quantité peut s'exprimer à l'aide des fonctions Γ , dont la définition est, comme on sait,

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1);$$

on a effectivement

$$T_i = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{\Gamma(2n-2i-1)}{\Gamma(n-i)} \cdot \frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+2)};$$

ou

$$T_i = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)} \frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)} \cdot \frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)}.$$

A l'aide de la relation

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

découverte par *Legendre*, nous transformerons les deux rapports

$$\frac{\Gamma(2n - 2i)}{\Gamma(n - i)}, \quad \frac{\Gamma(2i + 2)}{\Gamma(i + 1)},$$

en

$$\frac{2^{2n-2i-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n - i + \frac{1}{2}\right), \quad \frac{2^{2i+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(i + \frac{3}{2}\right);$$

alors le terme général devient

$$T_i = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)} \cdot \frac{2^{2n}}{\pi} \Gamma\left(n - i + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(i + \frac{3}{2}\right);$$

ou enfin

$$T_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots i(i+1)} \cdot \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma\left(n - i - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(i + \frac{1}{2}\right). \quad (10)$$

Nous pouvons remplacer le produit des deux fonctions Γ par une intégrale eulérienne de première espèce, au moyen de la relation,

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1} d\theta;$$

et nous aurons

$$T_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots(i+1)} \cdot \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma(n) \cdot \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta. \quad (11)$$

De même, si nous substituons au facteur

$$\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots(i+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+2)\Gamma(n-i+1)},$$

la quantité

$$\Gamma(n+1) : \Gamma(n+3) \int_0^1 \theta^{i+1}(1-\theta)^{n-i} d\theta;$$

nous obtiendrons finalement

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1} d\theta}, \quad (12)$$

Au moyen de cette valeur de T_1 , l'équation (8) devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n-1}}{\pi} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} \sum_0^{n-1} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i} (1-\theta)^{i+1} d\theta},$$

ou

$$\frac{n+2}{2^{2n-1}} \pi = \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^n d\theta \sum_0^{n-1} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i} (1-\theta)^{i+1} d\theta}, \quad (13)$$

V.

Le terme général de notre développement peut se mettre sous une forme différente de (12). Nous pouvons écrire

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma(n+1) \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2}) \Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1) \Gamma(i+2)}.$$

Or

$$\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} = \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

et

$$\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)} = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

donc

$$T_i = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (14)$$

Les valeurs (12) et (14) devant être identiques, on aura

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta = \frac{4}{\pi} n(n+1)(n+2) \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^{i+1} d\theta \\ \times \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (15)$$

Si l'on suppose $i = 1$, il vient

$$\pi = 4n(n+1)(n+2) \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^n d\theta \times \int_0^1 \theta^1 (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (16)$$

D'ailleurs, ces deux dernières relations se vérifient immédiatement.

En mettant pour T , sa nouvelle expression dans (8), cette équation devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \Gamma(n+1) \sum_0^{n-1} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Et à cause de

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = 2 \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right);$$

puis de

$$\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta;$$

nous aurons enfin

$$2\pi \int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \sum_0^{n-1} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (17)$$

VI.

L'équation précédente exprime une propriété des fonctions Γ . Pour la mettre en évidence, remplaçons π par $2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$; puis chaque intégrale définie par sa valeur; il viendra

$$4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)} = \sum_0^{n-1} \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)};$$

ou, en changeant n en $n-1$ et i en $i-1$:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_1^{n-1} \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)}. \quad (18)$$

Ainsi, en posant

$$\frac{\Gamma(i - \frac{1}{2})}{\Gamma(i + 1)} = A_i,$$

on a

$$A_i \cdot A_n = \frac{1}{4} \sum_i^{n-1} A_{n-i} A_i. \quad (19)$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus simple. Pour cela, remarquons d'abord qu'en posant $i = 0$, la fonction A_i devient $\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$. Or, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$, et $\Gamma(1) = 1$. Si donc, après avoir chassé le dénominateur de l'équation précédente, nous ajoutons $2A_0 A_n$ aux deux membres, nous obtiendrons

$$4A_0 A_n - 4\sqrt{\pi} \cdot A_n = \sum_0^n A_{n-i} A_i.$$

ou simplement, à cause de $A_1 = \sqrt{\pi}$:

$$\sum_0^n A_{n-i} A_i = 0 \quad (20)$$

Autrement dit, l'équation aux différences finies

$$P_0 P_n + P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \dots + P_{n-1} P_1 + P_n P_0 = 0,$$

est satisfaite par $P_n = \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)}$, pourvu que l'on prenne $P_0 = -2\sqrt{\pi}$, $P_1 = \sqrt{\pi}$.

Il est d'ailleurs évident que cette équation n'a lieu qu'à partir de $n = 2$.

Il suit aussi, de ce qui précède, que l'intégrale générale de l'équation

$$4P_i P_n = P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \dots + P_{n-1} P_1, \quad (21)$$

est

$$P_n = \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{P_i}{\sqrt{\pi}}. \quad (22)$$

VII.

Je terminerai cette note par la solution d'un problème qui a une liaison remarquable avec la question de Géométrie, traitée par M. Lamé.

PROBLÈME. *De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs différents.*

Désignons par Z_{n+1} ce nombre.

Supposons les n facteurs écrits dans l'ordre alphabétique.

$$abc \dots ghkl \dots qrs;$$

décomposons ce produit en deux groupes, l'un composé de i facteurs $abc \dots gh$, l'autre composé des $n - i$ facteurs restants; désignons en outre par X_{n+1} le nombre de manières dont il est possible d'effectuer le produit ci-dessus, sans changer l'ordre des lettres : il est clair que l'un des éléments de cette somme sera $X_{i+1} X_{n-i+1}$. Et comme i peut varier depuis 1 jusqu'à $n - 1$, nous aurons sans aucune omission ni répétition :

$$X_{n+1} = \sum_0^{n-1} X_{i+1} \cdot X_{n-i+1}. \quad (23)$$

On doit supposer $X_2 = 1$; d'ailleurs X_3 est aussi égal à 1 : il s'ensuit que l'équation (23) a la même intégrale que l'équation (1); savoir

$$X_{n+1} = P_{n+1}. \quad (24)$$

Nous avons supposé que les n facteurs étaient disposés en ordre alphabétique : comme ils peuvent être pris dans un ordre quelconque, la quantité X_{n+1} doit être multipliée par le nombre des permutations de n lettres; donc

$$Z_{n+1} = P_{n+1} \cdot \Gamma(n + 1),$$

ou

$$Z_{n+1} = n(n + 1)(n + 2) \dots (2n - 2). \quad (25)$$

Si, dans l'équation (23), nous mettons au lieu des X leurs valeurs en Z , nous trouverons après avoir multiplié tous les termes par $\Gamma(n + 1)$:

$$Z_{n+1} = \frac{n}{1} Z_n Z_n + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} Z_n Z_{n-1} + \dots + \frac{n}{1} Z_n Z_n, \quad (26)$$

et comme la formule (25) donne

$$Z_{n+1} = (4n - 6) Z_n. \quad (27)$$

Il s'ensuit que ces deux dernières équations rentrent l'une dans l'autre. Ce résultat, auquel il serait peut-être difficile d'arriver directement, est assez remarquable.

L'équation (26) devient, en mettant pour Z_{n+1} , sa valeur $\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)}$:

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n}{1} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)} + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(2n-5)}{\Gamma(n-2)} + \dots + \frac{n}{1} \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)}.$$

A cause de

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{(2n-2)\Gamma(2n-2)}{(n-1)\Gamma(n-1)} = 2 \frac{\Gamma(2n-2)}{\Gamma(n-1)} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

cette dernière équation se transforme facilement en

$$\left. \begin{aligned} 4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) &= \frac{n}{1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{5}{2}\right) \\ &+ \dots + \frac{n}{1} \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$\left. \begin{aligned} 4n \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{1}{2}} d\theta &= \frac{n+1}{1} \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{3}{2}} d\theta + \frac{n+1}{1} \frac{n}{2} \int_0^1 \theta^{-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{1}{2}} d\theta \\ &+ \dots + \frac{n+1}{1} \int_0^1 \theta^{n-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Les équations (28) ou (29) expriment une propriété des fonctions Γ , analogue à celle qui a été donnée plus haut.