Donc on a enfin

$$A_{m,n} = \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\pm \beta^{l-m} \{ A_{0,n}.\gamma'^{m} + A_{0,n+1}.m\gamma'^{m-1}\beta + A_{0,n-2}.\frac{m.m-1}{1.\ 2}\gamma'^{m-2}\beta^{2}$$
$$+ \text{etc.} + A_{0,n+m-1}.m\gamma'\beta^{m-1} + A_{0,n+m}.\beta^{m} \},$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu suivant que m est pair ou impair. Ce résultat s'accorde avec celui que l'on peut déduire d'une solution différente du même exemple, donnée par Laplace dans les mémoires de Paris, année 1779, n.° XVII, page 267.

Si l'on fait n négatif dans la formule (1) ci-dessus, on trouve, en rejetant les termes et celles de leurs parties où les indices de D sont négatifs et ceux de D' négatifs ou positifs > 0, que cette formule se réduit à la suivante :

$$A_{m,-n} = \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\pm \beta^{l} \{ A_{0,0}\underset{c}{\mathrm{D}}^{m}.(\alpha^{n}.\beta^{l-n-1}) - A_{0,1}\underset{c}{\mathrm{D}}^{m}.(\alpha^{n+1}.\beta^{l-n-2}) + A_{0,2}\underset{c}{\mathrm{D}}^{m}.(\alpha^{n+2}.\beta^{l-n-3}) - \text{etc.} \}$$

laquelle, à cause que $\alpha = 0$ et que sa seule dérivée D est β, devient

$$A_{m,-n} = \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\pm \beta^{l} \{ A_{0,0}.\beta^{n}\underset{c}{\mathrm{D}}^{m-n}.\beta^{l-n-1} - A_{0,1}.\beta^{n+1}\underset{c}{\mathrm{D}}^{m-n-1}.\beta^{l-n-2} + A_{0,2}.\beta^{n+2}\underset{c}{\mathrm{D}}^{m-n-2}.\beta^{l-n-3} - \text{etc.} \}.$$

D'où il suit que $A_{m,-n}$ n'est zéro qu'autant que m est $< n$. Ainsi la série récurrente s'étend, sous forme de triangle, dans la quatrième région.

Exemple VI.

246. Étant donné le commencement de la table suivante, où chaque terme est formé de la somme de celui qui le précède dans la même ligne horizontale et de celui qui le suit d'un rang dans la ligne horizontale immédiatement supérieure, avec la condition que chacun des termes de la première ligne horizontale soit égal à l'unité : on demande le terme général de cette table :

1	1	1	1	1	etc.
1	2	3	4	5	etc.
2	5	9	14	20	etc.
5	14	28	48	75	etc.
14	42	90	165	275	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

L'équation de relation est $A_{m,n} = A_{m-1,n} + A_{m+1,n-1}$; j'y mets $m - 1$ au lieu de m, et elle devient

$$0 = \left\{ \begin{array}{lr} & -A_{m,n-1} \\ -A_{m-2,n} + A_{m-1,n} & \end{array} \right\};$$

ainsi α est zéro, $\beta = 1$, $\beta' = -1$, $\gamma = -1$, les autres dérivées de α étant zéro.

Je continue la table proposée dans les autres régions au moyen de l'équation de relation, et j'ai ce tableau

				etc.						etc.			
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
etc.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	etc.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.*	o	o	o	
	.	.	.	.	.	.	.*	$1^{\star}$	1	1	1	1	
etc.	.	.	.	.	.*	$-1^{\star}$	o	1	2	3	4	5	etc.
	.	.	.	o	−1	−1	o	2	5	9	14	20	
	.	o	o	−1	−2	−2	o	5	14	28	48	75	
etc.	o	o	−1	−3	−5	−5	o	14	42	90	165	275	etc.
	o	−1	−4	−9	−14	−14	o	42	132	297	572	1001	
			etc.		etc.				etc.		etc.		

où les termes marqués par des points demeurent indéterminés, parce que rien de ce qui est donné ne peut conduire à les déterminer; ils sont donc arbitraires. Faisons les égaux chacun à zéro. On pourroit leur donner d'autres valeurs, sans que la partie de la série comprise dans la première région en fût altérée.

Je vois facilement que dans la supposition que nous venons de faire, l'équation de relation a lieu dans toute l'étendue de la série, excepté aux deux endroits après les termes desquels nous avons mis des *; ces endroits répondent aux termes $a_{1,0}$ et $a_{-1,1}$ du numérateur, dont les valeurs sont

$$a_{1,0} = \left\{ \begin{array}{lr} & -A_{1,-1} \\ -A_{-1,0} + A_{0,0} & \end{array} \right\} = 1, \quad a_{-1,1} = \left\{ \begin{array}{lr} & -A_{-1,0} \\ -A_{-3,1} + A_{-2,1} & \end{array} \right\} = -1;$$

tous les autres coëfficiens du numérateur sont donc zéro. Ainsi le numérateur se réduit à $x - x^{-1}y$, et la fraction génératrice est

$$\frac{x - x^{-1}y}{x - x^2 - y} = \frac{bx + a_{-1,1}.x^{-1}y}{\beta x + \gamma x^2 + \beta' y}.$$

Ici le développement doit commencer par β, de sorte que l'origine sera $a\beta^{-1}$, et, en faisant, dans le théorème du n.° 143, $r = 1$ et $s = 0$, on aura, en observant qu'ici l'indice p de $a_{p,q}$ devient aussi négatif,

$$A_{m,n} =$$

$$b\{\underset{c}{D}^{m}.\underset{c}{D}'^{n}.\beta^{-1} - \underset{c}{D}^{m+1}.\underset{c}{D}'^{n}.(\alpha.\beta^{-2}) + \underset{c}{D}^{m+2}.\underset{c}{D}'^{n}.(\alpha^{2}.\beta^{-3}) - \text{etc.}\}$$
$$+ a_{-1,1}\{\underset{c}{D}^{m+2}.\underset{c}{D}'^{n-1}.\beta^{-1} - D^{m+3}\underset{c}{D}'^{n-1}.(\alpha.\beta^{-2}) + \underset{c}{D}^{m+4}.\underset{c}{D}'^{n-1}.(\alpha^{2}.\beta^{-3}) - \text{etc.}\}.$$

Les lignes d'origine ou de démarcation prennent dans ce cas la position suivante, en mettant les coëfficiens du dénominateur sous la forme de rectangle,

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta' & & \end{array}$$

Ainsi α n'a point de dérivée selon D, donc le signe D n'affecte point α; et puisque, par la nature du dénominateur, α n'a d'autre dérivée selon D$'$ que β', on donnera facilement au développement précédent la forme suivante, en mettant pour b et $a_{-1,1}$ leurs valeurs 1 et -1,

$$A_{m,n} =$$

$$\underset{c}{D}^{m}.\underset{c}{D}'^{n}.\beta^{-1} - \beta'\underset{c}{D}^{m+1}.\underset{c}{D}'^{n-1}.\beta^{-2} + \beta'^{2}\underset{c}{D}^{m+2}.\underset{c}{D}'^{n-2}.\beta^{-3} - \text{etc.}$$
$$- \underset{c}{D}^{m+2}.\underset{c}{D}'^{n-1}.\beta^{-1} + \beta'\underset{c}{D}^{m+3}.\underset{c}{D}'^{n-2}.\beta^{-2} - \beta'^{2}\underset{c}{D}^{m+4}.\underset{c}{D}'^{n-3}.\beta^{-3} + \text{etc.}$$

Mais, β n'ayant d'autre dérivée que γ, tous les termes dans lesquels l'indice de D$'$ n'est pas nul ne donneront rien : il n'y aura donc dans la première ligne de cette formule qu'un seul terme à conserver et un seul dans la seconde; et l'on aura ainsi

$$A_{m,n} = \pm\, \beta'^{n}\underset{c}{D}^{m+n}.\beta^{-n-1} \pm \beta'^{n-1}\underset{c}{D}^{m+n+1}.\beta^{-n},$$

ou, en développant encore,

$$A_{m,n} = \left\{\begin{array}{l} \pm\, \beta'^{n}.\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.(2n+m)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(m+n)}\beta^{-2n-m-1}\gamma^{m+n} \\ \pm\beta'^{n-1}.\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots..(2n+m)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots.(m+n+1)}\beta^{-2n-m-1}\gamma^{m+n+1}. \end{array}\right.$$

Mettant pour β, β', γ leurs valeurs 1, -1, -1, on aura

$$A_{m,n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ (2n+m)}{1.\quad 2\ldots\ldots..(m+n)} - \frac{n(n+1)\ \ldots.(2n+m)}{1.\quad 2\ldots..(m+n+1)}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)\ldots.(2n+m)}{1.\quad 2\ldots\ldots.(m+n+1)}(m+1), \text{ ou bien}$$
$$A_{m,n} = (m+1)\frac{(m+n+2)(m+n+3)(m+n+4)\ldots..(m+2n)}{1.\qquad 2.\qquad 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n};$$

ce

ce qui est en effet l'expression du terme général, comme il est aisé de le vérifier en donnant à m et à n des valeurs particulières.

EXEMPLE VII. (*)

247. Étant donnée l'équation de relation

$$A_{m,n} = pA_{m-1,n-1} + (1-p)A_{m-1,n+1}, \qquad \ldots\ldots(1)$$

avec les conditions que $A_{m,0} = 1$, m étant un entier positif quelconque, et que $A_{0,n} = 0$, n étant un entier quelconque positif ou négatif, excepté lorsque $n = 0$, auquel cas $A_{0,0} = 1$; que de plus on suppose $A_{m,n} = 0$ pour toutes les valeurs négatives de m : faisant $1 - p = q$, pour plus de simplicité, on demande le terme général.

Je mets d'abord $n-1$ au lieu de n dans l'équation de relation, et je l'écris ainsi

$$0 = \left\{ \begin{array}{c} -pA_{m-1,n-2} \\ 0 \\ -qA_{m-1,n} \end{array} \right. + A_{m,n-1}; \qquad \ldots\ldots(2)$$

on a mis un o dans le second membre pour conserver aux termes leurs places dans la disposition en rectangle. Au moyen des conditions données et de l'équation (2), je calcule le commencement de la série et je trouve

	etc.			etc.		etc.		etc.
	o	o	o	o	o	q^4	q^4	etc.
etc.	o	o	o	o	q^3	q^3	q^3+3q^4p	etc.
	o	o	o	q^2	q^2	q^2+2q^3p	q^2+2q^3p	etc.
	o★	o★	q★	q★	$q+q^2p$★	$q+q^2p$★	$q+q^2p+2q^3p^2$★	etc.
	o	1★	1★	1★	1★	1★	1★	1★
	o★	o★	p★	p★	$p+p^2q$★	$p+p^2q$★	$p+p^2q+2p^3q^2$★	etc.
etc.	o	o	o	p^2	p^2	p^2+2p^3q	p^2+2p^3q	etc.
	o	o	o	o	p^3	p^3	p^3+3p^4q	etc.
	o	o	o	o	o	p^4	p^4	etc.
	etc.			etc.		etc.		etc.

(*) On est conduit à cet exemple par le problème V de LAGRANGE, numéros 58 et suivans du mémoire cité, savoir : « La probabilité d'amener un événement donné à chaque coup étant p, un joueur parie qu'en « m coups au moins il amènera cet événement un nombre de fois qui surpassera de n le nombre des fois « qu'il ne l'amènera pas. »