ΤΑ ΕΝΟΡΑΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΛΟΓΙΚΗ ΤΟΥΣ

ΓΑΡΥΦΑΛΛΙΑ ΒΑΦΕΙΑΔΟΥ ΚΑΙ JOAN RAND ΜΟΣΧΟΒΑΚΗ

Τα πρώτα σπέρματα του μαθηματικού ενορατισμού (intuitionism) φάνηκαν στην Ευρώπη εδώ και πάνω από έναν αιώνα στις κατασκευαστικές τάσεις του Borel, του Baire, του Lebesgue, του Poincaré, του Kronecker και άλλων. Η άνθησή του στάθηκε έργο ενός ανθρώπου, του Luitzen Egbertus Jan Brouwer, που δίδαξε μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο του Amsterdam από το 1909 ως το 1951. Με τα σημαντικά θεωρήματα που απέδειξε για τις τοπολογικές αναλλοίωτες και τα σταθερά σημεία των συνεχών μετασχηματισμών, ο Brouwer γρήγορα έχτισε μια μαθηματική φήμη αρκετά ισχυρή ώστε να υποστηρίξει τις επαναστατικές του ιδέες για τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας. Αυτές οι ιδέες επηρέασαν τον Hilbert και τον Gödel[1] κι έκαναν τα ενορατικά μαθηματικά και τη λογική τους ν' αναγνωριστούν σαν αντικείμενα που αξίζουν ανεξάρτητη μελέτη.

Σκοπός μας είναι να περιγράψουμε την ανάπτυξη του ενορατισμού του Brouwer, από την απόρριψη του νόμου του αποκλειομένου τρίτου της κλασικής λογικής, μέχρι την αμφιλεγόμενη θεωρία του για το συνεχές, με συνέπειες θεμελιακές για τη λογική και τα μαθηματικά. Δανειζόμαστε τα τυπικά αξιωματικά συστήματα του Kleene για την ενορατική λογική και την αριθμητική (στα οποία αντικατοπτρίζονται και οι αντίστοιχες προσπάθειες των Kolmogorov, Glivenko, Heyting και Peano που είχαν προηγηθεί) που, εκτός των άλλων, έχουν το πλεονέκτημα να τις παρουσιάζουν σαν υποθεωρίες των αντίστοιχων κλασικών θεωριών, και σκιαγραφούμε τη χρήση που κάνει των αριθμών gödel των αναδρομικών συναρτήσεων για να *πραγματοποιεί* (realize) προτάσεις της ενορατικής αριθμητικής, ανάμεσά τους και μία μορφή της Θέσης του Church. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε την αξιωματική πραγμάτευση της θεωρίας του συνεχούς του Brouwer που πρότειναν οι Kleene και Vesley, μαζί με την ερμηνεία της συναρτησιακής πραγματοποίησης (functional realizability), που θεμελιώνει τη συνέπεια της θεωρίας αυτής.

1. Το πρωιμο εργο του Brouwer

Στα 1907 ο Brouwer δημοσίευσε (στα ολλανδικά) τη διδακτορική του διατριβή, με τίτλο που μπορεί να μεταφραστεί "Για τα θεμέλια των μαθηματικών".[2] Αυτό το αξιοπρόσεχτο μανιφέστο, με τις αιρετικές του αντιλήψεις για τα μαθηματικά, τη λογική

Θέλουμε να ευχαριστήσουμε τους Κώστα Μαυρομμάτη, Γιάννη Μοσχοβάκη και Σήφη Πετράκη, που διάβασαν δοκιμαστικές μορφές του άρθρου και μας πρόσφεραν τα σχόλια και τις υποδείξεις τους.

[1]Η συμμετοχή του Brouwer στη διαμάχη γύρω από τα θεμέλια των μαθηματικών έβαλε έντονη τη σφραγίδα της σ' όσους πήραν μέρος· μια πολύ πλούσια παρουσίαση του θέματος γίνεται στο [?], όπου ανάμεσα στ' άλλα εξετάζεται η ισχυρή επιρροή του Brouwer στη σκέψη του "αντιπάλου" του Hilbert, καθώς και στο έργο του Gödel.

[2]Μία αγγλική μετάφραση, η οποία χρησιμοποιήθηκε για τα αποσπάσματα αυτής της παραγράφου, βρίσκεται στο [?].

και τη γλώσσα, ασκούσε κριτική κι επισήμαινε λάθη σε κάθε σημαντική μαθηματική φιλοσοφία του καιρού. Αν και ο Brouwer γνώριζε το έργο του Γάλλου ενορατικού μαθηματικού Poincaré και την κατασκευαστική προσέγγιση της θεωρίας συνόλων από τον Borel, δεν ήταν στη φύση του ν' ακολουθεί άλλους. Στην ομιλία που έδωσε με αφορμή την εκλογή του στο Πανεπιστήμιο του Amsterdam το 1912, αναφέρθηκε στη φιλοσοφία του με το όνομα *νεο-ενορατισμός* (neo-intuitionism),[3] όμως το σφρίγος και η δημιουργικότητα που ο Brouwer προσέδωσε στο αντικείμενο με ένα έργο σχεδόν μισού αιώνα, συνέδεσαν το όνομά του, περισσότερο από οποιουδήποτε άλλου, με την ενορατική φιλοσοφία των μαθηματικών. Πολλές από τις βασικές αρχές του ενορατισμού του βρίσκονταν ήδη ξεκαθαρισμένες στη διδακτορική του διατριβή.

Σε απόλυτη αντίθεση με το πρόγραμμα του λογικισμού των Russell και Whitehead, ο Brouwer υποστήριξε το 1907 ότι τα μαθηματικά δεν μπορούν να θεωρούνται μέρος της λογικής. "Αυστηρά μιλώντας η κατασκευή των διαισθητικών μαθηματικών η ίδια είναι *δράση* και όχι *επιστήμη·* γίνεται επιστήμη, δηλ. μία ολότητα αιτιακών διαδοχών, που μπορούν να επαναλαμβάνονται στο χρόνο, μόνο όταν πρόκειται για μαθηματικά δεύτερης τάξης [μεταμαθηματικά], τα οποία συνίστανται στη *μαθηματική θεώρηση των μαθηματικών ή της γλώσσας των μαθηματικών*... Ομως τότε, όπως και στην περίπτωση της θεωρητικής λογικής, πρόκειται για μία *εφαρμογή των μαθηματικών*, δηλαδή για μία *πειραματική επιστήμη*" ([?] σελ. 61).[4]

Η ανακάλυψη των μη-ευκλείδειων γεωμετριών έδειξε, σύμφωνα με τον Brouwer, ότι ο Kant είχε μόνο εν μέρει δίκιο υποστηρίζοντας ότι οι διαισθήσεις του χώρου και του χρόνου προηγούνται εννοιολογικά (και είναι ανεξάρτητες) από την εμπειρία. "...μπορούμε να αποκαλούμε a priori μόνο αυτό το ένα πράγμα που είναι κοινό σε όλα τα μαθηματικά και είναι ... επαρκές για να οικοδομηθούν όλα τα μαθηματικά, δηλαδή την ενόραση των πολλών-σαν-ένα (many-oneness), τη βασική ενόραση των μαθηματικών. Και εφόσον μ' αυτή την ενόραση αποκτάμε συνείδηση του χρόνου σαν αλλαγής καθ' εαυτήν, μπορούμε να δηλώσουμε: *το μόνο a priori στοιχείο στην επιστήμη είναι ο χρόνος*" ([?] σελ. 61).

Το πρόγραμμα του φορμαλισμού του Hilbert ήταν καταδικασμένο σε αποτυχία γιατί "η γλώσσα είναι ένα μέσο ... για τη μετάδοση [των μαθηματικών] αλλά ... δεν έχει τίποτε να κάνει με τα μαθηματικά" και δεν είναι ουσιώδης γι' αυτά. Επιπλέον, η "... *ύπαρξη* ενός μαθηματικού συστήματος που ικανοποιεί ένα σύνολο αξιωμάτων δεν μπορεί ποτέ να αποδειχθεί από τη συνέπεια του λογικού συστήματος που βασίζεται σ' αυτά τα αξιώματα", αλλά μόνο με κατασκευή. "A fortiori [κατά μείζονα λόγο] δεν είναι βέβαιο ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα μπορεί είτε να λυθεί είτε να αποδειχθεί ότι δεν λύνεται" ([?] σελ. 79).

Σύμφωνα με τον Brouwer, τα παράδοξα στη θεωρία συνόλων προέρχονται από τη θεώρηση συνόλων που είναι πολύ μεγάλα και αφηρημένα για να οικοδομηθούν μαθηματικά. Ακόμη και η δεύτερη κλάση αριθμών του Cantor δεν μπορεί να υπάρχει, αν και η έννοια είναι συνεπής. Η απόδειξη του Zermelo της αρχής της καλής διάταξης από το αξίωμα επιλογής είναι αποτέλεσμα παραπλάνησης. Πράγματι, το συνεχές δεν μπορεί να διαταχθεί καλά, "πρώτον διότι το μεγαλύτερο μέρος των στοιχείων

[3]"Intuitionism and Formalism", μία αγγλική μετάφραση αυτής της ομιλίας, εμφανίστηκε στο Bulletin of the American Mathematical Society την ίδια χρονιά, και περιλαμβάνεται στο [?].

[4]Μέσα στα αποσπάσματα όλες οι λέξεις σε [ ] είναι δικές μας, όμως τα πλάγια είναι του ίδιου του Brouwer.

του συνεχούς πρέπει να θεωρείται σαν άγνωστο, και ... δεύτερον διότι κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο είναι αριθμήσιμο" ([?] σελ. 84-85).

Στο τέλος της διατριβής, σαν τη δεύτερη από τις εικοσιμία "ΘΕΣΕΙΣ (προς υποστήριξη μαζί με τη διατριβή)", ο Brouwer κάνει τη δήλωση: "Δεν είναι μόνο αδύνατο να αποδειχθεί το ότι η αρχή της πλήρους επαγωγής είναι αποδεκτή, αλλά δεν πρέπει καν να θεωρείται ούτε σαν ένα ιδιαίτερο αξίωμα ούτε σαν μία ιδιαίτερη διαισθητική αλήθεια. Η πλήρης επαγωγή είναι μία πράξη μαθηματικής κατασκευής, που δικαιολογείται απλώς από τη βασική ενόραση των μαθηματικών"([?] σελ. 98). Αυτή η θέση αχρηστεύει ουσιαστικά το έργο του Peano, όμως δέχεται μία δυνάμει απειρία φυσικών αριθμών μαζί με μία μέθοδο να δείχνουμε ότι ιδιότητες αυθαίρετης πολυπλοκότητας (ακόμη κι εκείνες που εμπεριέχουν ποσοδείκτηση σε όλους τους φυσικούς αριθμούς) ισχύουν για τον καθένα από αυτούς. Σ' αυτό το πλαίσιο η προγενέστερη παρατήρηση του Brouwer ότι "το *όλα* ή το *για κάθε* ... εμπεριέχει σιωπηρά τον περιορισμό: *εφόσον ανήκει σε μία μαθηματική δομή η οποία υποτίθεται ότι έχει κατασκευαστεί εκ των προτέρων*"([?] σελ. 76) υποδεικνύει ότι η *δομή* των φυσικών αριθμών μπορεί να νοηθεί σαν ένα πλήρως κατασκευασμένο αντικείμενο, παρά το ότι η *συλλογή* όλων των φυσικών αριθμών δεν μπορεί να συλληφθεί με μια ματιά.

2. Η ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ενα χρόνο μετά τη διατριβή του, στο άρθρο "Η αναξιοπιστία των λογικών αρχών", ο Brouwer παρουσίασε επιχειρήματα εναντίον της χρήσης της κλασικής λογικής στα μαθηματικά και την επιστήμη. Συμφωνούσε με τις αρχές του *συλλογισμού* (αν όλα τα A είναι B και όλα τα B είναι Γ, τότε όλα τα A είναι Γ) και της *αντίφασης* (τίποτε δεν είναι μαζί A και όχι A), όχι όμως με το νόμο του αποκλειομένου τρίτου (κάθε τι είναι A ή όχι A) όταν πρόκειται να εφαρμοστεί σε άπειρα συστήματα.[5] Στην πραγματικότητα, ο Brouwer ξεχώριζε το ενορατικά μη αποδεκτό $A \vee \neg A$ από το ενορατικά ορθό $\neg\neg(A \vee \neg A)$, κάνοντας πλήρη χρήση της εκφραστικής δύναμης της γλώσσας της λογικής, για να διακρίνει κατασκευές που θεμελιώνουν πραγματικότητες (αλήθειες) από κατασκευές που θεμελιώνουν τη συνέπεια.[6]

Εξετάζοντας τη στάση του Brouwer απέναντι στην τυπική λογική, δύσκολα προκαλεί έκπληξη το ότι δεν επιχείρησε να αξιωματικοποιήσει την ενορατική λογική. Παρ' όλ' αυτά, αναγνώρισε τη χρησιμότητα της διατύπωσης γενικών αρχών, που θα μπορούσαν ν' αποτελέσουν τη βάση για μαθηματικές κατασκευές. Αυτό ακριβώς νομιμοποιεί τη διαμόρφωση τυπικών συστήματων για την ενορατική λογική και τις ενορατικές μαθηματικές θεωρίες, τα οποία έχουν βέβαια ενορατικά αιτιολογημένα αξιώματα και αποδεικτικούς κανόνες. Οπως λέει και ο Kleene στο [?] σελ. 5, η αντίρρηση του Brouwer ήταν μόνο ενάντια στον τυπικό συλλογισμό, όταν αυτός δεν έχει αντίστοιχο (μαθηματικό) νόημα.

[5][?] σελ. 109-110. Στην πραγματικότητα, ο Brouwer υποστήριζε, "...το ζήτημα της εγκυρότητας της αρχής του αποκλειομένου τρίτου είναι ισοδύναμο με το ερώτημα *αν μπορούν να υπάρχουν μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα.* Δεν υπάρχει ίχνος απόδειξης για την πεποίθηση, η οποία έχει κάποιες φορές υποστηριχθεί, ότι δεν υπάρχουν μη επιλύσιμα μαθηματικά προβλήματα." Θα επανέλθουμε σ' αυτό το ζήτημα στις παραγράφους 3 και 4.

[6]Ο D. Hesseling ([?] σελ.280) αποδίδει στον A. Kolmogorov [?] την παρατήρηση ότι για τον Brouwer μία πρόταση της μορφής $\neg B$ είναι *θετικά υπαρξιακή*: "υπάρχει μία αλυσίδα από λογικά συμπεράσματα, που ξεκινάει με την υπόθεση ότι το B είναι σωστό και καταλήγει σε μία αντίφαση". Με τον ίδιο συλλογισμό, το $\neg\neg B$ επιβεβαιώνει τη συνέπεια του B.

Το 1925 ο Andrei Kolmogorov [?] πρότεινε αξιώματα για την (ελαχιστική, minimal) ενορατική λογική μόνο με συνεπαγωγή και άρνηση· το άρθρο του (στα ρωσικά) τράβηξε λίγο ή και καθόλου την προσοχή στη Δυτική Ευρώπη. Τυπικά συστήματα για την ενορατική προτασιακή λογική δημοσιεύτηκαν (στα γαλλικά) από τον Valerii Glivenko το 1928 [?] και το 1929 [?]. Το πρώτο δεν ήταν πλήρες. Το δεύτερο περιλάμβανε δύο επιπλέον αξιώματα που είχαν υποδειχθεί από το μαθητή του Brouwer Arend Heyting, ο οποίος παρουσίασε τις δικές του λεπτομερείς αξιωματικοποιήσεις της ενορατικής προτασιακής και κατηγορηματικής λογικής και μέρους των ενορατικών μαθηματικών σε τρία κλασικά άρθρα [?], [?], [?] τον επόμενο χρόνο.[7] Ο Heyting άρχιζε με την εξής διατύπωση επιφυλάξεων:

> "Τα ενορατικά μαθηματικά είναι μία νοητική διαδικασία, και κάθε γλώσσα, περιλαμβανομένης και της τυπικής, είναι ένα βοήθημα για τη μετάδοσή τους και μόνο. Είναι κατ' αρχήν αδύνατο να κατασκευαστεί ένα σύστημα τύπων ισοδύναμο με τα ενορατικά μαθηματικά, αφού οι δυνατότητες της σκέψης δεν μπορούν να αναχθούν σε ένα πεπερασμένο αριθμό κανόνων κατασκευασμένων εκ των προτέρων."[8]

Παρ' όλ' αυτά, η προσπάθεια να εξηγήσει με μεταμαθηματικά μέσα τη διαφορά της ενορατικής από την κλασική λογική είχε νόημα, γιατί η θεωρία του συνεχούς του Brouwer ερχόταν σε αντίθεση με την κλασική λογική.

Για να είναι αποδεκτή ενορατικά, μία γενική λογική αρχή πρέπει να μπορεί να ερμηνεύεται ομοιόμορφα με όρους κατασκευών (αποδείξεων ή υπολογισμών). Η ερμηνεία του Kolmogorov με βάση την έννοια του προβλήματος και η διασύνδεση των προτάσεων με τις (κατασκευαστικά αποδεκτές) αποδείξεις τους που έκανε ο Heyting, είναι ειδικές περιπτώσεις αυτού που έγινε γνωστό σαν η Brouwer-Heyting-Kolmogorov εξήγηση των ενορατικών συνδέσμων και ποσοδεικτών.

Οπως και ο ορισμός της αλήθειας του Tarski, η B-H-K ερμηνεία είναι μάλλον ευρετική παρά μαθηματικά ακριβής, και βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αληθινές ατομικές προτάσεις δικαιολογούνται από μόνες τους. Μία συνεπαγωγή μπορεί να δικαιολογηθεί μόνο από μία κατασκευή η οποία μετατρέπει κάθε δεδομένη δικαιολόγηση της υπόθεσης σε μία δικαιολόγηση του συμπεράσματος. Μία διάζευξη δικαιολογείται από μία κατασκευή η οποία επιλέγει μία συγκεκριμένη από τις δύο περιπτώσεις και παρέχει τη δικαιολόγησή της. Η άρνηση μίας πρότασης δικαιολογείται από μία κατασκευή η οποία θα μετέτρεπε οποιαδήποτε δικαιολόγηση της πρότασης σε μία απόδειξη μιας γνωστής αντίφασης. Σ' αυτή την ερμηνεία βρίσκουν την αιτιολόγησή τους οι ενορατικές αντιρρήσεις στους κλασικούς νόμους του αποκλειομένου τρίτου και της διπλής άρνησης.

Ξεκινώντας γύρω στα 1940 ο Αμερικανός λογικός S. C. Kleene, που έβλεπε με συμπάθεια τις ενορατικές ιδέες, αφιέρωσε σημαντική προσπάθεια για να διευκρινιστεί η ακριβής σχέση τους με την κλασική λογική και τα μαθηματικά.[9] Οι φορμαλισμοί τύπου Hilbert για την ενορατική λογική και την αριθμητική που παρουσιάζουμε εδώ

[7]Η σημείωση του 1929 του Glivenko και το πρώτο μέρος της αξιωματικοποίησης του Heyting μεταφράστηκαν πρόσφατα από το γαλλικό και γερμανικό πρωτότυπο στα αγγλικά για τη συλλογή [?].

[8]Μία έγκυρη και αναγνώσιμη σύνοψη της συμβολής του Heyting στο αντικείμενο είναι του A. S. Troelstra [?], απ' όπου έχουμε δανειστεί και αποδώσει στα ελληνικά την ομαλή αγγλική μετάφραση της πρώτης φράσης του Heyting. [?]

[9]Ο Kleene, εμπνεόμενος από μία παρατήρηση των Hilbert και Bernays, θεώρησε το "$\exists x A(x)$", για παράδειγμα, σαν "μη πλήρη πρόταση η οποία συμπληρώνεται δίνοντας ένα x τέτοιο ώστε $A(x)$,

είναι του Kleene [?] (σελ. 82), με μικρές αλλαγές στα σύμβολα και την αρίθμηση. Αντιπροσωπεύουν μία ανεξάρτητη επιλογή ανάμεσα από πολλά αξιώματα που είχαν προταθεί νωρίτερα από τους Kolmogorov, Glivenko, Heyting και Peano.

2.1. **Ο ενορατικός προτασιακός λογισμός Pp.** Το πρώτο βήμα στη μεταμαθηματική μελέτη οποιουδήποτε κομματιού της λογικής ή των μαθηματικών είναι να προσδιορίσουμε μία *τυπική γλώσσα*. Για την προτασιακή λογική, η καθιερωμένη γλώσσα έχει ένα αριθμήσιμο πλήθος διακριτών προτασιακών συμβόλων $P_0, P_1, P_2, \ldots$ και τα σύμβολα &, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ για τους προτασιακούς συνδέσμους "και", "είτε", "αν ... τότε", και "όχι" αντίστοιχα, και δεξιές και αριστερές παρενθέσεις (,) (που μερικές φορές τις γράφουμε και "[,]" για ευκολία στην ανάγνωση). Η κλασική λογική χρειάζεται στην πραγματικότητα μόνο δύο συνδέσμους (αφού οι κλασικοί σύνδεσμοι $\vee$ και $\rightarrow$ μπορούν να οριστούν από τους & και $\neg$), όμως οι τέσσερις ενορατικοί σύνδεσμοι είναι ανεξάρτητοι. Ετσι, η κλασική γλώσσα περιέχεται γνήσια στην ενορατική, η οποία είναι πιο εκφραστική.

Το πιο σημαντικό εργαλείο των μεταμαθηματικών είναι η γενικευμένη επαγωγή, μία μέθοδος που ο Brouwer υιοθετούσε ανεπιφύλακτα. Η κλάση των (*προτασιακών*) *τύπων* της γλώσσας του **Pp** ορίζεται επαγωγικά από τα

(i) Κάθε προτασιακό σύμβολο είναι (*ατομικός*) *τύπος*.
(ii) Αν οι A, B είναι *τύποι* τότε είναι και οι (A & B), $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ και $(\neg A)$.
(iii) Τίποτε δεν είναι *τύπος*, εκτός απ' ό,τι απαιτείται από τα (i) και (ii).

Οπως στην κλασική λογική, το $(A \leftrightarrow B)$ είναι συντομογραφία του $((A \rightarrow B)$ & $(B \rightarrow A))$. Οι μη ουσιώδεις παρενθέσεις παραλείπονται, με τη σύμβαση ότι το $\neg$ είναι ισχυρότερο από τα &, $\vee$, που είναι ισχυρότερα από το $\rightarrow$.

Τα δομικά συστατικά της εκδοχής του Kleene για την ενορατική προτασιακή λογική **Pp** είναι ένα πεπερασμένο πλήθος από *αξιώματα-σχήματα*, που καθένα τους συνοψίζει μία δυνάμει άπειρη συλλογή ενορατικά ορθών τύπων, και ένας *αποδεικτικός κανόνας* που εκφράζει μία ενορατικά αποδεκτή αρχή εξαγωγής ενός συμπεράσματος από υποθέσεις. Τα αξιώματα είναι όλα τύποι των ακόλουθων μορφών:[10]

X1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
X2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
X3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \,\&\, B)$.
X4. $A \,\&\, B \rightarrow A$.
X5. $A \,\&\, B \rightarrow B$.
X6. $A \rightarrow A \vee B$.
X7. $B \rightarrow A \vee B$.
X8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$.
X9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$.
X10. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Ο αποδεικτικός κανόνας του **Pp** είναι ο

μαζί με την επιπλέον πληροφορία που απαιτείται για να συμπληρωθεί η πρόταση '$A(x)$' γι' αυτό το x." Αυτή η ερμηνεία οδήγησε στην αναδρομική πραγματοποίηση· δες §5.

[10] Το αξιωματικό σύστημα του Glivenko περιλάμβανε τα X3 - X9· του Heyting περιλάμβανε τα X1, X6, και τα X8 - X10 αλλά χειριζόταν τη συμμετρία των & and $\vee$ διαφορετικά· και τα δύο είχαν ένα ανάλογο του X2. Ο Heyting έδειξε ότι τα αξιώματά του είναι ανεξάρτητα και δεν αποδεικνύουν το $\neg\neg A \rightarrow A$. Η εκδοχή του X2 του Kleene είχε επιλεγεί για να απλοποιείται η απόδειξη του Θεωρήματος Απαγωγής.

R1 (*Modus Ponens*). Από τα A και $A \to B$, συμπεραίνουμε το B.

Μία τυπική *απόδειξη* στο **Pp** είναι μία πεπερασμένη ακολουθία $E_1, \ldots, E_k$ από τύπους, καθένας από τους οποίους είναι ή αξίωμα ή άμεση συνέπεια, σύμφωνα με τον αποδεικτικό κανόνα, δύο προηγούμενων τύπων της ακολουθίας.[11] Κάθε απόδειξη λέμε ότι *είναι απόδειξη του τελευταίου της τύπου*, ο οποίος είναι κατά συνέπεια ένα *θεώρημα* του **Pp**. Γράφουμε $\vdash_{\mathbf{Pp}} E$ για να δηλώσουμε ότι το E είναι θεώρημα του **Pp**.

Παράδειγμα. Εδώ δίνεται μία πλήρης τυπική απόδειξη (στην πραγματικότητα ένα σχήμα απόδειξης, καθώς το A μπορεί να είναι οποιοσδήποτε τύπος) στο **Pp** του $\neg(A \,\&\, \neg A)$, αναφέροντας την αιτιολόγηση κάθε βήματος.

(1) $(A \,\&\, \neg A) \to A$. [αξίωμα από το X4]
(2) $(A \,\&\, \neg A) \to \neg A$. [αξίωμα από το X5]
(3) $((A \,\&\, \neg A) \to A) \to (((A \,\&\, \neg A) \to \neg A) \to \neg(A \,\&\, \neg A))$. [αξίωμα από το X9]
(4) $(A \,\&\, \neg A) \to \neg A) \to \neg(A \,\&\, \neg A))$. [βάσει του R1 από τα (1), (3)]
(5) $\neg(A \,\&\, \neg A)$. [βάσει του R1 από τα (2), (4)]

Αν Γ είναι συλλογή τύπων και $E_1, \ldots, E_k$ πεπερασμένη ακολουθία τύπων, ο καθένας από τους οποίους ανήκει στο Γ ή είναι αξίωμα ή άμεση συνέπεια βάσει του R1 δύο προηγούμενων τύπων, τότε η $E_1, \ldots, E_k$ είναι μία *παραγωγή στο* **Pp** *του* τελευταίου της τύπου E_k *από* τις υποθέσεις Γ. Γράφουμε $\Gamma \vdash_{\mathbf{Pp}} E$ για να δηλώσουμε ότι υπάρχει μία τέτοια παραγωγή με $E_k = E$. Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται με επαγωγή στον ορισμό μιας παραγωγής· το αντίστροφό του έπεται από τον R1.

Το Θεώρημα Απαγωγής. Αν Γ είναι συλλογή τύπων και A, B είναι τύποι τέτοιοι ώστε $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{Pp}} B$, τότε επίσης $\Gamma \vdash_{\mathbf{Pp}} (A \to B)$.

Η αξιωματικοποίηση είναι φτιαγμένη έτσι ώστε η κλασική προτασιακή λογική $\mathbf{Pp}^c$ να προκύπτει από το **Pp** αντικαθιστώντας το αξίωμα-σχήμα X10 με το ισχυρότερο

$X10^c$. $\neg\neg A \to A$.

Οι ορισμοί της *απόδειξης* και της *παραγωγής* για το $\mathbf{Pp}^c$ είναι όπως αυτοί για το **Pp** αλλά με τα X1-$X10^c$ αντί για τα X1-X10. Για να δείξουμε ότι το **Pp** είναι μία υποθεωρία του $\mathbf{Pp}^c$ αρκεί να αποδείξουμε το $\vdash_{\mathbf{Pp}^c}$ X10, μία σχετικά απλή άσκηση.

Το 1929 ο Glivenko [?] απέδειξε ότι αν A είναι τύπος τέτοιος ώστε $\vdash_{\mathbf{Pp}^c} A$, τότε $\vdash_{\mathbf{Pp}} \neg\neg A$. Αυτή η απλή μορφή ισχύει *μόνο* για την προτασιακή λογική, και είναι γνωστή σαν το "Θεώρημα του Glivenko."

Γύρω στο 1933 ο Kurt Gödel [?] και ο Gerhard Gentzen (δημοσιευμένο μετά το θάνατό του στο [?]) παρατήρησαν ανεξάρτητα ότι το $\mathbf{Pp}^c$ μπορεί να μεταφραστεί πιστά στο **Pp**.[12] Συνοπτικά, κάθε προτασιακή μεταβλητή αντικαθίσταται από τη διπλή της άρνηση, και στη συνέχεια το $\vee$ αντικαθίσταται επαγωγικά από τον κλασικό του ορισμό μέσω των $\neg$ και &. Αν Γ^g, A^g είναι οι μεταφράσεις των Γ, A αντίστοιχα, τότε

(i) $\vdash_{\mathbf{Pp}^c} (A^g \leftrightarrow A)$, και
(ii) $\Gamma^g \vdash_{\mathbf{Pp}} A^g$ αν και μόνο αν $\Gamma \vdash_{\mathbf{Pp}^c} A$.

---

[11] Αυτή, καθώς και παρόμοιες περιγραφές, είναι σύντομες διατυπώσεις των προφανών αντίστοιχων επαγωγικών ορισμών.

[12] Το 1925 ο Kolmogorov [?] δημοσίευσε μία διαφορετική αρνητική μετάφραση για το κομμάτι με $\to$ και $\neg$ μόνο.

Στα 1934-35 ο Gentzen [?] απέδειξε ένα θεώρημα κανονικής μορφής για έναν ενορατικό λογισμό ακολουθητών, που δίνει έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο που αποφασίζει αν ένας αυθαίρετος τύπος A είναι ή όχι αποδείξιμος στο **Pp**. Δεδομένου ότι η ενορατική προτασιακή λογική δεν διαθέτει ερμηνεία με πεπερασμένους αληθοπίνακες, ο αλγόριθμος απόφασης για το **Pp** είναι πιο πολύπλοκος απ' ό,τι για το $\mathbf{Pp}^c$.

2.2. **Ο ενορατικός πρωτοβάθμιος κατηγορηματικός λογισμός Pd.** Η καθαρή πρωτοβάθμια γλώσσα έχει ατομικές μεταβλητές $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots$, και ένα αριθμήσιμο άπειρο πλήθος διακριτών κατηγορηματικών n-μελών συμβόλων $\mathrm{P}_1(\ldots)$, $\mathrm{P}_2(\ldots), \ldots$, για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, περιλαμβανομένων των 0-μελών προτασιακών συμβόλων. Υπάρχουν δύο καινούργια λογικά σύμβολα $\forall$ ("για κάθε") και $\exists$ ("υπάρχει").

Οι *όροι* της γλώσσας του **Pd** είναι οι ατομικές μεταβλητές. Οι *τύποι* ορίζονται από τα

(i) Αν το $\mathrm{P}(\ldots)$ είναι n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο και οι $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{n}$ είναι όροι, τότε ο $\mathrm{P}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{n})$ είναι (*ατομικός*) *τύπος*.
(ii) Αν οι A, B είναι *τύποι* τότε το ίδιο είναι και οι $(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B})$, $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$, $(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$ και $(\neg \mathrm{A})$.
(iii) Αν ο A είναι *τύπος* και η x ατομική μεταβλητή, τότε ο $(\forall \mathrm{x} \mathrm{A})$ και ο $(\exists \mathrm{x} \mathrm{A})$ είναι *τύποι*.
(iv) Τίποτε άλλο δεν είναι *τύπος*.

Χρησιμοποιούμε τα $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{w}, \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \ldots$ και τα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{A}(\mathrm{x}), \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \ldots$ σαν μεταβλητές στη μεταγλώσσα για μεταβλητές και τύπους αντίστοιχα. Προνοώντας για τις εφαρμογές (π.χ. στην αριθμητική), οι $\mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{s}_1, \mathrm{t}_1, \ldots$ δηλώνουν όρους. Ως προς την παράλειψη των παρενθέσεων, το $\forall$x και το $\exists$x συμπεριφέρονται όπως η $\neg$. Η *εμβέλεια* ενός ποσοδείκτη και οι *ελεύθερες* και *δεσμευμένες* εμφανίσεις μιας μεταβλητής σ' έναν τύπο, ορίζονται όπως συνήθως. Ενας τύπος στον οποίο κάθε μεταβλητή είναι δεσμευμένη είναι μία *πρόταση ή κλειστός τύπος*.

Αν η x είναι μεταβλητή, ο t όρος και ο A(x) τύπος ο οποίος μπορεί να περιέχει ή όχι ελεύθερη την x, τότε ο A(t) δηλώνει το αποτέλεσμα της αντικατάστασης κάθε ελεύθερης εμφάνισης της x στον A(x) από μία εμφάνιση του t. Η αντικατάσταση είναι *ελεύθερη* αν καμία ελεύθερη εμφάνιση στον t οποιασδήποτε μεταβλητής δεν γίνεται δεσμευμένη στον A(t)· στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η x είναι *αντικαταστάσιμη από τον* t *στον* A(x).[13]

Εκτός από τα X1 - X10, το **Pd** έχει δύο καινούργια *αξιώματα-σχήματα*, όπου ο A(x) μπορεί να είναι οποιοσδήποτε τύπος και ο t όρος από τον οποίο η x είναι αντικαταστάσιμη στον A(x):

X11. $\forall \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{A}(\mathrm{t})$.
X12. $\mathrm{A}(\mathrm{t}) \to \exists \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x})$.

Εκτός από τον R1, το **Pd** έχει δύο καινούργιους *αποδεικτικούς κανόνες*:

R2. Από τον $\mathrm{C} \to \mathrm{A}(\mathrm{x})$ όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον C, συμπεραίνουμε τον $\mathrm{C} \to \forall \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x})$.
R3. Από τον $\mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{C}$ όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον C, συμπεραίνουμε τον $\exists \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x}) \to \mathrm{C}$.

[13] Εχει σημασία ποιος ήταν ο τύπος που συμβολιζόταν αρχικά με A(x), γιατί αν οι x, y είναι διαφορετικές και εμφανίζονται και οι δύο ελεύθερες στον A(x), τότε η ακολουθία ελεύθερων αντικαταστάσεων $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{y} \mapsto \mathrm{x}$ καταλήγει σ' ένα τύπο διαφορετικό από τον A(x).

Μία *απαγωγή* (*ή παραγωγή*) στο **Pd** *ενός τύπου* E *από* μια συλλογή Γ τύπων-υποθέσεων είναι μία πεπερασμένη ακολουθία τύπων, που ο καθένας τους είναι ή αξίωμα σύμφωνα με τα X1 - X12, ή μέλος του Γ, ή έπεται άμεσα με βάση τους R1, R2 ή R3 από έναν ή περισσότερους τύπους που εμφανίζονται προηγουμένως στην ακολουθία. *Απόδειξη* είναι μία απαγωγή χωρίς υποθέσεις.

Αν Γ είναι μία συλλογή προτάσεων και E ένας τύπος, ο συμβολισμός $\Gamma \vdash_{\mathbf{Pd}} \mathrm{E}$ σημαίνει ότι μία απαγωγή του E από το Γ υπάρχει. Αν Γ είναι συλλογή τύπων, γράφουμε $\Gamma \vdash_{\mathbf{Pd}} \mathrm{E}$ μόνο αν υπάρχει μία απαγωγή του E από το Γ στην οποία ούτε ο R2 ούτε ο R3 χρησιμοποιούνται ως προς μία μεταβλητή ελεύθερη στο Γ. Μ' αυτό τον περιορισμό, το θεώρημα απαγωγής επεκτείνεται στο **Pd**: Αν $\Gamma \cup \{\mathrm{A}\} \vdash_{\mathbf{Pd}} \mathrm{B}$ τότε $\Gamma \vdash_{\mathbf{Pd}} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})$.

Παράδειγμα. Εδώ δίνεται μία απαγωγή στο **Pd** του $\exists \mathrm{xA(x)}$ από το $\forall \mathrm{xA(x)}$ χωρίς χρήση του R2 ή του R3:

(1) $\forall \mathrm{xA(x)} \to \mathrm{A(x)}$. [αξίωμα από το X11, με τη x αντικαταστάσιμη από τη x στον A(x)]
(2) $\forall \mathrm{xA(x)}$. [υπόθεση]
(3) A(x). [με βάση τον R1 από τα (1) και (2)]
(4) $\mathrm{A(x)} \to \exists \mathrm{xA(x)}$. [αξίωμα από το X12, με τη x αντικαταστάσιμη από τη x στον A(x)]
(5) $\exists \mathrm{xA(x)}$. [με βάση τον R1 από τα (3) και (4)]

Τότε το $\vdash_{\mathbf{Pd}} \forall \mathrm{xA(x)} \to \exists \mathrm{xA(x)}$ έπεται από το θεώρημα απαγωγής.

Η κλασική κατηγορηματική λογική $\mathbf{Pd}^c$ προκύπτει από το **Pd** αντικαθιστώντας το X10 με το ισχυρότερο $\mathrm{X10}^c$. Η αρνητική μετάφραση επεκτείνεται στην κατηγορηματική λογική χρησιμοποιώντας τον κλασικό ορισμό του $\exists$ μέσω των $\forall$ και $\neg$. Η διαφορά ανάμεσα στις κατασκευαστικές και κλασικές αποδείξεις ύπαρξης φαίνεται ανάγλυφα από τις ισχυρές ιδιότητες *ύπαρξης* και *διάζευξης* του **Pd**:

- Αν $\vdash_{\mathbf{Pd}} \exists \mathrm{xA(x)}$ όπου καμία μεταβλητή εκτός από την x δεν είναι ελεύθερη στον A(x), τότε $\vdash_{\mathbf{Pd}} \mathrm{A(x)}$, οπότε και $\vdash_{\mathbf{Pd}} \forall \mathrm{xA(x)}$.
- Αν $\vdash_{\mathbf{Pd}} \forall \mathrm{x[A(x)} \vee \mathrm{B(x)]}$ όπου καμία μεταβλητή εκτός από την x δεν είναι ελεύθερη στον A(x) ή τον B(x), τότε $\vdash_{\mathbf{Pd}} \forall \mathrm{xA(x)}$ ή $\vdash_{\mathbf{Pd}} \forall \mathrm{xB(x)}$.

2.3. **Ενορατική κατηγορηματική λογική με ισότητα Pd[=].** Για να είναι χρήσιμη για τα μαθηματικά, η τυπική γλώσσα πρέπει να περιέχει μία διμελή κατηγορηματική σταθερά $\cdot = \cdot$ η οποία να δηλώνει την ισότητα. Αν οι s, t είναι όροι, τότε ο s = t είναι *ατομικός τύπος* στον οποίο όλες οι μεταβλητές που είναι ελεύθερες στον s ή τον t είναι ελεύθερες. Κάθε ατομικός τύπος της γλώσσας του **Pd** είναι επίσης ατομικός στο **Pd**[=], και οι *τύποι* σχηματίζονται από τους ατομικούς τύπους χρησιμοποιώντας τα $\&, \vee, \to, \neg, \forall$ και $\exists$ όπως προηγουμένως.

Τα αξιώματα του **Pd**[=] είναι όλοι οι τύποι της επεκτεταμένης γλώσσας των μορφών X1 - X12, μαζί με τα ακόλουθα αξιώματα της ισότητας, όπου οι x, y και z είναι διαφορετικές μεταβλητές και ο A(x) μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ατομικός τύπος της γλώσσας του **Pd**, στον οποίο η x είναι αντικαταστάσιμη από την y.

XE1. $\mathrm{x = y} \to (\mathrm{x = z} \to \mathrm{y = z})$.
XE2. x = x.
XE3. $\mathrm{x = y} \to (\mathrm{A(x)} \to \mathrm{A(y)})$.

Οι αποδεικτικοί κανόνες είναι οι R1 - R3 επεκτεταμένοι στη νέα γλώσσα. Η *ιδιότητα αντικατάστασης της ισότητας* ισχύει: αν ο A(x) είναι τύπος και η y είναι μεταβλητή από την οποία η x είναι αντικαταστάσιμη στον A(x) και η y δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον A(x) (εκτός αν η y είναι η x), τότε $\vdash_{\mathbf{Pd}[=]}$ $x = y \to (A(x) \leftrightarrow A(y))$.

Τα αξιώματα εξασφαλίζουν ότι η = είναι σχέση ισοδυναμίας. Δεν αποδεικνύουν ότι η = είναι αποκρίσιμη ούτε ακόμη *ευσταθής* ως προς τη διπλή άρνηση, αφού $\not\vdash_{\mathbf{Pd}[=]}$ $\neg\neg(x = y) \to (x = y)$.[14]

Μία τυπική μαθηματική εφαρμογή θα έχει ατομικές σταθερές και συναρτησιακά σύμβολα, με έναν κατάλληλο ορισμό του *όρου*, και όλοι οι ατομικοί τύποι θα είναι ισότητες. Τα αξιώματα της ισότητας για τις συναρτησιακές σταθερές θα πάρουν τη θέση του XE3, και το XE2 θα μπορεί να συναχθεί από τα μαθηματικά αξιώματα.

3. Η ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ HA

Ο Heyting [?] πρώτος αξιωματικοποίησε την ενορατική αριθμητική, η οποία ονομάζεται "αριθμητική Heyting " προς τιμή του.[15] Η εκδοχή του Kleene [?] (p. 82) της **HA** έχει σταθερές και αξιώματα για το μηδέν, τον επόμενο, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, και το απεριόριστο αξίωμα-σχήμα της μαθηματικής επαγωγής.

3.1. Η αριθμητική Heyting και η αριθμητική Peano. Η γλώσσα της **HA** είναι μία εφαρμοσμένη εκδοχή της γλώσσας του **Pd**[=], χωρίς κατηγορηματικά σύμβολα, αλλά με μία ατομική σταθερά **0** και συναρτησιακές σταθερές $'$, $+$ και $\cdot$. Οι *όροι* ορίζονται επαγωγικά:

(i) Το **0** είναι *όρος*.
(ii) Κάθε ατομική μεταβλητή είναι *όρος*.
(iii) Αν ο s είναι *όρος*, τότε είναι και ο (s').
(iv) Αν ο s και ο t είναι *όροι*, τότε είναι και οι $(s + t)$ και $(s \cdot t)$.
(v) Τίποτε δεν είναι *όρος* εκτός απ' ό,τι απαιτείται από τα (i) - (iv).

Οι *ατομικοί τύποι* είναι οι εκφράσεις της μορφής $(s = t)$, όπου ο s και ο t είναι όροι. Οι *τύποι* σχηματίζονται απ' αυτούς όπως συνήθως, παραλείποντας παρενθέσεις με τη σύμβαση ότι το $'$ είναι ισχυρότερο από τα $+, \cdot$. Κάθε εμφάνιση μιας ατομικής μεταβλητής σ' έναν όρο t είναι ελεύθερη στον t (και σε κάθε ατομικό τύπο που περιέχει τον t). Ενας όρος ή τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές είναι *κλειστός*.

Τα *αξιώματα* της **HA** είναι τα σχήματα X1 - X12 για τη γλώσσα της αριθμητικής, το αξίωμα ισότητας XE1, το αξίωμα-σχήμα της *μαθηματικής επαγωγής* για αυθαίρετους τύπους A(x):

XInd. $A(\mathbf{0}) \wedge \forall x(A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x)$,

και τα επιπρόσθετα αξιώματα για τις σταθερές για τις πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις:

XN1. $x = y \to x' = y'$.
XN2. $x' = y' \to x = y$.
XN3. $\neg(x' = \mathbf{0})$.
XN4. $x + \mathbf{0} = x$.

[14] Ο Heyting [?] εισήγαγε τρία διαφορετικά σύμβολα για να εκφράσει τρία είδη σχέσεων ισότητας: τη νοηματική (intensional) ταυτότητα, τη μαθηματική ταυτότητα και την οριζόμενη ισότητα. Για την αριθμητική και οι τρεις έννοιες συμπίπτουν, και η αριθμοθεωρητική ισότητα είναι αποκρίσιμη. Η ισότητα των ακολουθιών επιλογών, στις οποίες θα αναφερθούμε μιλώντας για το συνεχές, ορίζεται εκτασιακά και είναι ευσταθής ως προς τη διπλή άρνηση· είναι όμως αναποκρίσιμη.

[15] Ο J. van Oosten [?] σημειώνει ότι οι τυποποιήσεις της **HA** σαν υποθεωρίας της αριθμητικής Peano οφείλουν τόσα στον Gödel [?] και τον Kleene [?] όσα και στον Heyting. Ο Hesseling [?] παρατηρεί ότι ο Gödel χρησιμοποίησε τα αξιώματα του Herbrand.

XN5. $x + (y') = (x + y)'$.
XN6. $x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
XN7. $x \cdot (y') = (x \cdot y) + x$.

Οι *αποδεικτικοί κανόνες* της **HA** είναι οι R1 - R3 για τη γλώσσα της αριθμητικής. Οι *παραγωγές* και οι *αποδείξεις* ορίζονται επαγωγικά όπως συνήθως, και $\Gamma \vdash_{\mathbf{HA}} E$ σημαίνει ότι μία παραγωγή στην **HA** του E από το Γ υπάρχει, στην οποία ούτε ο R2 ούτε ο R3 χρησιμοποιούνται ως προς μία μεταβλητή ελεύθερη στο Γ.

Η κατασκευή των (συνήθων) φυσικών αριθμών παράγει ένα όνομα ή *ψηφίο* για τον καθένα, έτσι το $\mathbf{0}''$ είναι το ψηφίο για το 2. Κάθε κλειστός όρος t της γλώσσας εκφράζει (ως προς την κύρια ερμηνεία) έναν συγκεκριμένο φυσικό αριθμό· αν το **t** είναι το αντίστοιχο ψηφίο, τότε $\vdash_{\mathbf{HA}} t = \mathbf{t}$. Οι φυσικοί αριθμοί είναι διακριτοί:

- $\vdash_{\mathbf{HA}}\ (x = y) \vee \neg(x = y)$.
- $\vdash_{\mathbf{HA}}\ \neg\neg(x = y) \rightarrow (x = y)$.
- $\vdash_{\mathbf{HA}}\ (x = 0) \vee \exists y(x = y')$.

Η κλασική αριθμητική Peano **PA** προκύπτει από την **HA** αντικαθιστώντας το X10 με το ισχυρότερο $X10^c$. O Gödel [?] επέκτεινε την αρνητική μετάφραση στην **PA**, ανάγοντας έτσι τη συνέπεια της **PA** σ' αυτήν της **HA** και δείχνοντας επομένως ότι η **HA** δεν μπορεί να αποδείξει η ίδια τη συνέπειά της.

Οι αποδείξεις του Kleene στο [?] του πρώτου και του δεύτερου θεωρήματος μη πληρότητας του Gödel εφαρμόζονται στην **HA** όπως και στην **PA**. Η αριθμητικοποίηση των μεταμαθηματικών είχε γίνει στο ενορατικό υποσύστημα, οπότε κάθε πρωτογενώς αναδρομικό κατηγόρημα μπορεί να εκφραστεί στην **HA** από έναν *αποκρίσιμο* τύπο. Αν ο T(e,x,w) είναι ένας τέτοιος τύπος που εκφράζει ότι το "w είναι ο αριθμός gödel ενός υπολογισμού του $\{e\}(x)$" και ο A(x) είναι ο $\exists z T(x, x, z)$, τότε $\nvdash_{\mathbf{HA}} \neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ κι έτσι η $\mathbf{HA} + \neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ είναι συνεπής.[16] Αυτή είναι μία ειδική περίπτωση του αξιοσημείωτου γεγονότος ότι η ενορατική αριθμητική είναι συνεπής με μία κλασικά ψευδή μορφή της Θέσης του Church, όπως πρόκειται να δούμε.

3.2. **Η αναδρομική πραγματοποίηση του Kleene για την ενορατική αριθμητική.** Η αφετηρία και η ανάπτυξη της αναδρομικής πραγματοποίησης (recursive realizability) εξιστορούνται απολαυστικά από τον Jaap van Oosten στο [?]. O Stephen Kleene, μαθητής του Alonzo Church, πήρε σοβαρά υπ' όψη τον ισχυρισμό των Hilbert και Bernays στο [?] ότι "μία πρόταση της μορφής 'υπάρχει αριθμός n με την ιδιότητα $A(n)$' είναι ...μία μη πλήρης απόδοση μιας πρότασης καθορισμένης με περισσότερη ακρίβεια, η οποία συνίσταται είτε στο να δίνεται άμεσα ένας αριθμός n με την ιδιότητα $A(n)$, είτε στο να παρέχεται μία διαδικασία με την οποία ένας τέτοιος αριθμός μπορεί να βρεθεί ...'." O Kleene γενίκευσε αυτή την ιδέα για να ερμηνεύσει κάθε σύνθετη πρόταση της ενορατικής αριθμητικής σαν μία μη πλήρη περιγραφή μιας αποτελεσματικής διαδικασίας με την οποία θα μπορούσε να βεβαιωθεί η ορθότητά της, και στη συνέχεια εφάρμοσε τη Θέση του Church για να ταυτίσει το "αποτελεσματικό" με το "αναδρομικό". Το αποτέλεσμα ήταν η 1945-*πραγματοποίηση* ή *αριθμητική πραγματοποίηση*.[17]

[16]Για να δείξουμε ότι ο ¬E είναι συνεπής με ένα ενορατικό σύστημα πρέπει να δείξουμε ότι ο ¬¬E (και όχι ο E) δεν αποδεικνύεται.

[17]O Kolmogorov [?] είχε νωρίτερα προτείνει μία "ερμηνεία των προβλημάτων" των ενορατικών συνδέσμων, αλλά δεν την είχε διασυνδέσει με τις αναδρομικές συναρτήσεις.

Για τον επαγωγικό ορισμό, τα n και m είναι φυσικοί αριθμοί, και το $(n)_i$ είναι ο εκθέτης του i-οστού πρώτου στην ανάλυση του n σε πρώτους παράγοντες (μετρώντας το 2 σαν τον 0-οστό πρώτο, και θέτοντας $(0)_i = 0$ κατά σύμβαση. Τα διατεταγμένα ζεύγη κωδικοποιούνται από το $(n, m) = 2^n \cdot 3^m$, και το $\{n\}(m)$ δηλώνει το αποτέλεσμα της εφαρμογής της n-οστής αναδρομικής μερικής συνάρτησης στο όρισμα m.

Ορισμός. (Kleene 1945) Ενας αριθμός n *πραγματοποιεί* (realizes) μία πρόταση E μόνο ως εξής:

(1) το n *πραγματοποιεί* έναν κλειστό ατομικό τύπο $\mathrm{r} = \mathrm{t}$, αν ο $\mathrm{r} = \mathrm{t}$ είναι αληθινός ως προς την κύρια ερμηνεία.
(2) το n *πραγματοποιεί* τον $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$, αν το $(n)_0$ *πραγματοποιεί* τον A και το $(n)_1$ *πραγματοποιεί* τον B.
(3) το n *πραγματοποιεί* τον $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$, αν $(n)_0 = 0$ και το $(n)_1$ *πραγματοποιεί* τον A, ή $(n)_0 \neq 0$ και το $(n)_1$ *πραγματοποιεί* τον B.
(4) το n *πραγματοποιεί* τον $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$, αν, για κάθε m: αν το m *πραγματοποιεί* τον A τότε το $\{n\}(m)$ ορίζεται και *πραγματοποιεί* τον B.
(5) το n *πραγματοποιεί* τον $\neg\mathrm{A}$, αν κανένα m δεν *πραγματοποιεί* τον A.
(6) το n *πραγματοποιεί* τον $\forall\mathrm{x}\mathrm{A}(\mathrm{x})$, αν, για κάθε m: το $\{n\}(m)$ ορίζεται και *πραγματοποιεί* τον $\mathrm{A}(\mathbf{m})$.
(7) το n *πραγματοποιεί* τον $\exists\mathrm{x}\mathrm{A}(\mathrm{x})$, αν το $(n)_1$ *πραγματοποιεί* τον $\mathrm{A}(\mathbf{m})$ όπου $m = (n)_0$.

Ενας τύπος E είναι *πραγματοποιήσιμος* αν κάποιο n πραγματοποιεί την καθολική κλειστότητα $\forall$E του E.

Ο Kleene διατύπωσε την εικασία ότι κάθε κλειστό θεώρημα της **HA** είναι πραγματοποιήσιμο. Ο μαθητής του David Nelson επαλήθευσε την εικασία και, στη συνέχεια, τυποποίησε την απόδειξη σε μία επέκταση της **HA**.[18] Το βασικό λήμμα λέει ότι για κάθε κλειστό όρο t που εκφράζει τον αριθμό που αντιστοιχεί στο ψηφίο $\mathbf{t}$:

$$\text{το } n \text{ πραγματοποιεί τον } \mathrm{A}(\mathrm{t}) \;\Leftrightarrow\; \text{το } n \text{ πραγματοποιεί τον } \mathrm{A}(\mathbf{t}).$$

Το Θεώρημα του Nelson. Αν $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_\mathrm{k} \vdash_{\mathbf{HA}} \mathrm{A}$ και οι $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_\mathrm{k}$ είναι πραγματοποιήσιμοι, τότε είναι και ο A.

Πόρισμα 1. Αν $\vdash_{\mathbf{HA}} \forall\mathrm{x}_1 \ldots \forall\mathrm{x}_\mathrm{n}\exists\mathrm{y}\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{y})$, όπου ο $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{y})$ περιέχει ελεύθερες μόνο τις $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{y}$, τότε υπάρχει μία γενική αναδρομική συνάρτηση ψ n μεταβλητών τέτοια ώστε, για όλες τις τιμές των $x_1, \ldots, x_n$: αν $\psi(x_1, \ldots, x_n) = y$, τότε ο $\mathrm{A}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\mathbf{n}, \mathbf{y})$ είναι πραγματοποιήσιμος.

Στο [?] ο Kleene παρατήρησε ότι οι περιπτώσεις του ορισμού για τα $\vee$, $\rightarrow$ και $\exists$ θα μπορούσαν να τροποποιηθούν για να δώσουν μία άλλη έννοια (που αργότερα ονομάστηκε *πραγματοποιήσιμος*-$\vdash$) για την οποία ίσχυε το ανάλογο του θεωρήματος του Nelson, μαζί με το ακόλουθο αποτέλεσμα.[19]

Πόρισμα 2 (της εκδοχής του Θεωρήματος του Nelson για το "πραγματοποιήσιμος-$\vdash$"). Αν ο $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{y})$ περιέχει ελεύθερες μόνο τις $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{y}$, και $\vdash_{\mathbf{HA}} \forall\mathrm{x}_1 \ldots \forall\mathrm{x}_\mathrm{n}\exists\mathrm{y}\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{y})$, τότε υπάρχει γενική αναδρομική συνάρτηση ψ

[18] Το τεχνικό μέρος της απόδειξης, στο [?], ήταν μη τετριμμένο. Ο Kleene [?] ανάγγειλε και ερμήνευσε τα αποτελέσματα του Nelson. Για μία εκτενή και καταληπτή σύγχρονη πραγμάτευση, δες Troelstra [?].

[19] Οι ιδιότητες της ύπαρξης και της διάζευξης για την **HA** εμπεριέχονταν σαν ειδικές περιπτώσεις, όπως σημείωσε αργότερα ο Kleene.

τέτοια ώστε για όλες τις τιμές των $x_1, \ldots, x_n$:

$$\vdash_{\mathbf{HA}} \mathrm{A}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}, \mathbf{y}) \text{ όπου } \psi(x_1, \ldots, x_n) = y.$$

3.3. **Η Θέση του Church.** Είναι δυνατό η Θέση του Church να εκφραστεί στη γλώσσα της αριθμητικής. Μία εκδοχή (που συνδυάζει και την αριθμήσιμη επιλογή) είναι το σχήμα CT_0:

$$\forall \mathrm{x} \exists \mathrm{y} \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow \exists \mathrm{e} \forall \mathrm{x} \exists \mathrm{w}[\mathrm{T}(\mathrm{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w}) \ \& \ \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{U}(\mathrm{w}))]$$

όπου το $\mathrm{T}(\mathrm{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w})$ εκφράζει ότι "το w είναι ο αριθμός gödel ενός υπολογισμού του $\{e\}(x)$" και το $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{U}(\mathrm{w}))$ είναι συντομογραφία του $\forall \mathrm{z}(\mathrm{U}(\mathrm{w}, \mathrm{z}) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{z}))$ όπου το U(w,z) εκφράζει ότι " το z είναι η τιμή, αν υπάρχει, που προκύπτει από τον υπολογισμό με αριθμό gödel w· αλλιώς $z = 0$". Η αρίθμηση gödel είναι πρωτογενώς αναδρομική, και τα T(e,x,w) και U(w,z) είναι αποκρίσιμα.[20] Το Θεώρημα του Nelson συνεπάγεται τα ακόλουθα αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας.

Πόρισμα 3. Η $\mathbf{HA} + \mathrm{CT}_0$ είναι συνεπής.

Πόρισμα 4. Αν $\mathrm{A}(\mathrm{x})$ είναι ο $\exists \mathrm{y} \mathrm{T}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ και $\mathrm{B}(\mathrm{x})$ είναι ο $\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{A}(\mathrm{x})$, τότε

(i) $\nvdash_{\mathbf{HA}} \forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{A}(\mathrm{x}))$,
(ii) $\nvdash_{\mathbf{HA}} \neg\neg \forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{A}(\mathrm{x}))$, και
(iii $\nvdash_{\mathbf{HA}} \forall \mathrm{x} \neg\neg \mathrm{B}(\mathrm{x}) \rightarrow \neg\neg \forall \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x})$.

Αν και η **HA** είναι υποσύστημα της **PA**, η $\mathbf{HA} + \mathrm{CT}_0$ είναι μία μη κλασική αριθμητική. Για να δούμε ότι η CT_0 δεν είναι συνεπής με την **PA**, έστω ότι A(x,y) είναι ο τύπος $(\mathrm{y} = 0 \rightarrow \forall \mathrm{z} \neg \mathrm{T}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{z}))$ & $(\mathrm{y} \neq 0 \rightarrow \mathrm{T}(\mathrm{x}, \mathrm{x}, \mathrm{y} \dot{-} 1))$. Προφανώς $\vdash_{\mathbf{PA}} \forall \mathrm{x} \exists \mathrm{y} \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Ακόμη και στην **HA** η υπόθεση $\forall \mathrm{x} \exists \mathrm{w}[\mathrm{T}(\mathrm{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w}) \ \& \ \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{U}(\mathrm{w}))]$ συνεπάγεται ότι $\exists \mathrm{w}[\mathrm{T}(\mathrm{e}, \mathrm{e}, \mathrm{w}) \ \& \ \mathrm{A}(\mathrm{e}, \mathrm{U}(\mathrm{w}))]$, αλλά $\vdash_{\mathbf{HA}} \forall \mathrm{w}[\mathrm{T}(\mathrm{e}, \mathrm{e}, \mathrm{w}) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{e}, \mathrm{w}+1)]$ και η αρίθμηση gödel είναι τέτοια ώστε $\vdash_{\mathbf{HA}} \forall \mathrm{w}(\mathrm{U}(\mathrm{w}) \leq \mathrm{w})$. Αρα έχουμε $\vdash_{\mathbf{HA}} \neg \exists \mathrm{e} \forall \mathrm{x} \exists \mathrm{w}[\mathrm{T}(\mathrm{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w})$ & $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{U}(\mathrm{w}))]$, οπότε η **PA** αποδεικνύει την άρνηση μίας περίπτωσης της CT_0.

3.4. **Αξιωματικοποίηση και τροποποιήσεις.** Οταν τυποποίησε τον αρχικό ορισμό, ο Nelson συσχέτισε με κάθε τύπο A της **HA** έναν άλλο τύπο e R A (μιάς διατηρητικής επέκτασης) της **HA**, και στη συνέχεια απέδειξε ότι κάθε τύπος της μορφής $\mathrm{A} \leftrightarrow \exists \mathrm{e}(\mathrm{e} \ \mathrm{R} \ \mathrm{A})$ ήταν πραγματοποιήσιμος και άρα συνεπής με την **HA**. Το 1971 ο Troelstra χρησιμοποίησε μία επέκταση ECT_0 της Θέσης του Church CT_0, για να προσδιορίσει επακριβώς την ισχύ της αριθμητικής πραγματοποίησης ως προς την ενορατική αριθμητική.[21] Συνοπτικά, ο Troelstra έδειξε ότι οι αποδείξιμες προτάσεις της $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0$ είναι ακριβώς αυτές των οποίων η πραγματοποίηση μπορεί να αποδειχθεί στην **HA**, και ότι $\vdash_{\mathbf{HA}+\mathrm{ECT}_0} (\mathrm{E} \leftrightarrow \exists \mathrm{x}(\mathrm{x} \ \mathrm{R} \ \mathrm{E}))$ για κάθε τύπο E.

Από την ενορατική άποψη η Θέση του Church είναι περιοριστική, και πιθανόν όχι αποδεκτή σαν μια γενική αρχή. Η Αρχή του Markov MP, το σχήμα

$$\forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{A}(\mathrm{x})) \rightarrow [\neg \forall \mathrm{x} \neg \mathrm{A}(\mathrm{x}) \rightarrow \exists \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x})],$$

είναι επίσης προβληματικό. Επειδή η MP συνεπάγεται την ίδια της την πραγματοποίηση, η $\mathbf{HA}$ + MP αποδεικνύει τη συνέπεια της $\mathbf{HA} + \mathrm{ECT}_0$ + MP.[22] Ο Kreisel [**?**]

[20] Για λεπτομέρειες και του ορισμού της *εκφρασιμότητας* δες [?].

[21] ECT_0 είναι το σχήμα $\forall \mathrm{x}[\mathrm{A}(\mathrm{x}) \rightarrow \exists \mathrm{y} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{y})] \rightarrow \exists \mathrm{e} \forall \mathrm{x}[\mathrm{A}(\mathrm{x}) \rightarrow \exists \mathrm{w}(\mathrm{T}(\mathrm{e}, \mathrm{x}, \mathrm{w}) \wedge \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{U}(\mathrm{w})))]$, όπου ο A(x) είναι *σχεδόν αρνητικός* (δεν περιέχει $\vee$ και $\exists$ εκτός αν βρίσκεται ακριβώς μπροστά από έναν τύπο χωρίς ποσοδείκτες)· κάθε τύπος e R A είναι αυτού του είδους.

[22] Ο Troelstra έδωσε πειστικά επιχειρήματα για το ότι τα "ρωσικά αναδρομικά μαθηματικά " της σχολής του Markov βασίζονται σ' αυτή τη θεωρία.

επινόησε μία εκδοχή με τύπους της πραγματοποίησης, για να δείξει την ανεξαρτησία της Αρχής του Markov.

Αλλες τροποποιήσεις της πραγματοποίησης έχουν αναπτυχθεί για να αποδειχθεί μία πλειάδα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας και συνέπειας, και αυτή η διαδικασία συνεχίζεται. Η πρωτότυπη (και πρότυπη) έννοια προσφέρει μία κατανοητή από την κλασική σκοπιά ερμηνεία της αριθμητικής του Heyting, όμως δεν διεκδικεί το ότι κατορθώνει να συλλάβει την ενορατική αριθμητική αλήθεια.

4. Η ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ

Η ουσιαστική αντίρρηση του Brouwer για τα κλασικά μαθηματικά (εκτός από τη χωρίς περιορισμό χρήση της αριστοτελικής λογικής αρχής του αποκλειομένου τρίτου) ήταν "ο τρόπος που εισάγεται και περιγράφεται το συνεχές".[23] Ολόκληρο το έργο του παρακινήθηκε από τη θέλησή του να περιγράψει μία κατασκευή του συνεχούς που να βρίσκεται σε αρμονία με τις αρχές του και ν' αναπτύξει σε βαθμό ικανοποιητικό τα μαθηματικά, παίρνοντας για βάση αυτή την κατασκευή.[24] Ακριβώς για να το κατορθώσει αυτό, δημιούργησε τις νέες έννοιες που δίνουν στα ενορατικά μαθηματικά τον ξεχωριστό τους χαρακτήρα.

Η ιδέα μας για το συνεχές, ας πούμε για την πραγματική ευθεία στην περίπτωση της μιας διάστασης, φαίνεται να βγαίνει πρώτα-πρώτα από την αντίληψή μας του χώρου, μιας πρωταρχικής, a priori όπως λέει ο Kant, έννοιας. Ετσι, μέχρι που εμφανίστηκαν οι μη-ευκλείδειες γεωμετρίες και χάθηκε η μοναδικότητα του ευκλείδειου χώρου, το συνεχές μπορούσε να θεωρείται έννοια αρχική, που μπορούμε άμεσα να συλλάβουμε με τη διαίσθηση, την ενόραση, που δε χρειάζεται ν' αναλυθεί σε άλλες έννοιες πιο στοιχειώδεις. Μετά όμως απ' αυτή την απώλεια, άρχισαν οι απόπειρες ορισμού του συνεχούς από έννοιες που έμοιαζαν πιο θεμελιώδεις, με μεθόδους όμως όλο και πιο αφηρημένες - ήταν άλλωστε η εποχή που ο Cantor δημιούργησε τη Θεωρία Συνόλων, τους άπειρους διατακτικούς και πληθικούς αριθμούς, η εποχή της αριθμητικοποίησης της ανάλυσης από τον Weierstrass, τον Dedekind, τον Cantor και άλλους.

Από τότε, στα παραδοσιακά κλασικά μαθηματικά, το συνεχές θεωρείται ότι είναι συλλογή από ξεχωριστά μαθηματικά αντικείμενα, τους πραγματικούς αριθμούς, που ορίζονται από τους ρητούς με τομές Dedekind ή ακολουθίες Cauchy ή ακολουθίες διαστημάτων με ρητά άκρα. Σ' όλες τις περιπτώσεις, πρέπει να μεταχειριστούμε μαθηματικά αντικείμενα άπειρης φύσης σαν ολοκληρωμένα, περατωμένα. Ακόμη και οι ημι-ενορατικοί μαθηματικοί όπως οι Poincaré, Borel και Lebesgue, όταν πραγματεύονται το συνεχές, δεν καταφέρνουν να κρατήσουν την κατασκευαστική οπτική. Ο Brouwer τους κατηγόρησε ότι ή "καταφεύγουν σε λογικά αξιώματα ύπαρξης" όπως το αξίωμα πληρότητας, ή αλλιώς "είναι ικανοποιημένοι με ένα πάντα-αριθμήσιμο και πάντα-ημιτελές" ([?] σελ.5) σύνολο αριθμών αφού, στην προσπάθειά τους να διατηρήσουν τον κατασκευαστικό χαρακτήρα των ορισμών τους, περιορίστηκαν σε ορίσιμα και άρα αριθμήσιμου πλήθους αντικείμενα[25] (για παράδειγμα, ορίσιμες ακολουθίες

[23]Από το κείμενο του Brouwer *Changes in the Relation between Classical Logic and Mathematics,* που υπάρχει στο [?], σελ.453.

[24]Οπως λέει ο Beth ([?] σελ.422), "την κεντρική θέση στα ενορατικά μαθηματικά κατέχει η θεωρία του συνεχούς".

[25]Εκτός από το πρόβλημα της πληθικότητας, και το μέτρο ενός τέτοιου συνόλου πραγματικών είναι μηδέν· και αυτό το ζήτημα απασχόλησε από νωρίς (και) τον Brouwer.

ρητών). Το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor όμως έδειχνε ότι είναι αδύνατο να απαριθμήσουμε όλα τα σημεία του συνεχούς.

O Brouwer δεχόταν το επιχείρημα του Cantor. Η πρώτη του απάντηση στο πρόβλημα που προέκυπτε για τα θεμέλια των μαθηματικών παρουσιάστηκε στο διδακτορικό του, όπου θεωρούσε το συνεχές σαν κάτι πρωταρχικό, "το αδιαχώριστο συμπλήρωμα του διακριτού", στο οποίο *δεν* μπορεί να αναχθεί:

> "Ομως το συνεχές σαν μια ολότητα μας δόθηκε με την ενόραση, μία κατασκευή γι' αυτό, μία δράση που θα δημιουργούσε από τη μαθηματική ενόραση 'όλα' τα σημεία του σαν ατομικότητες, είναι ασύλληπτη και αδύνατη" γιατί η "μαθηματική ενόραση δεν έχει την ικανότητα να δημιουργήσει άλλο από αριθμήσιμα σύνολα ατόμων." ([?], σελ.45)

Σύμφωνα με την ενορατική, διαισθητική του σύλληψη, το συνεχές μπορεί πρώταπρώτα να υποδιαιρείται απεριόριστα: δύο διακριτά σημεία συνδέονται από αυτό που υπάρχει "μεταξύ" ("between") τους, που ποτέ δεν εξαντλείται παρεμβάλλοντας κι άλλα σημεία. Ετσι, είναι δυνατόν, "αφού έχουμε δημιουργήσει μία κλίμακα με διατακτικό τύπο η [το διατακτικό τύπο των ρητών] να επιθέσουμε το συνεχές σαν μια ολότητα." ([?], σελ.45). Βέβαια ο τρόπος που από την περιγραφή αυτή φαίνεται να περνάμε από τους ρητούς με την πυκνή γραμμική τους διάταξη στο συνεχές, δεν δίνει καμία κατασκευή του συνεχούς, απλώς υποδηλώνει τη σχέση των ρητών με το συνεχές και ίσως δεν απέχει και πολύ από την παραδοχή κάποιου αξιώματος πληρότητας, αφού τα κενά ανάμεσα στα ρητά σημεία καλύπτονται από αυτό το (μάλλον αξεκαθάριστο) "μεταξύ" τους. Πάντως η ενορατική κατασκευή του συνεχούς στάθηκε στη συνέχεια μια πρόκληση για τον Brouwer· η απάντησή του σ' αυτό το πρόβλημα δόθηκε αργότερα και υπήρξε ουσιαστικά η κορυφαία δημιουργία του. Ανάμεσα σε πολλές και διάφορες σκέψεις γύρω από το συνεχές, στο διδακτορικό του ο Brouwer παρουσίασε και επιχειρήματα για την υπόθεση του συνεχούς, την εικασία δηλαδή ότι η δεύτερη κλάση αριθμών του Cantor και το συνεχές έχουν το ίδιο πλήθος σημείων: αυτή ισχύει κατ' αρχήν για τον πρώιμο Brouwer, γιατί βλέποντας το συνεχές σαν σύνολο σημείων, είμαστε αναγκασμένοι να ορίσουμε κάπως τα σημεία του, κι έτσι θα προκύψει ένα σύνολο ισοπληθικό με τη δεύτερη κλάση αριθμών.[26]

Ετσι, στη σκέψη του Brouwer όπως αυτή φανερώνεται μέσα από το διδακτορικό του, το συνεχές είχε την υπόσταση που του δίνεται από την ενόραση, πολύ κοντά στη γεωμετρική εικόνα του, όπως και σ' αυτή των ημι-ενορατικών. Μία κατασκευαστική *αριθμητική* οπτική του συνεχούς (με την έννοια ότι βασίζεται με κάποιο τρόπο σε κάποια έννοια αριθμού) στάθηκε ως τότε αδύνατη, κι έτσι ο μαθηματικός χειρισμός του παρέμενε πάντα προβληματικός. Στις διαλέξεις του της ώριμης περιόδου, ο Brouwer έδωσε στην πρώτη του μάλλον απορριπτική και περιοριστική παρέμβαση στα προβλήματα των θεμελίων, το όνομα "*Πρώτη Πράξη του Ενορατισμού*".[27] Μ'

[26]Ο Brouwer επισημαίνει βέβαια ότι το πρόβλημα δεν έχει τεθεί σωστά, αφού "ούτε η δεύτερη κλάση αριθμών ούτε το συνεχές σαν μία ολότητα εξατομικευμένων σημείων έχουν μαθηματική ύπαρξη" ([?], σελ.83).

[27]*Η Πρώτη Πράξη του Ενορατισμού.* Ο πλήρης διαχωρισμός των μαθηματικών από τη μαθηματική γλώσσα κι επομένως από τα φαινόμενα της γλώσσας που περιγράφονται από τη θεωρητική λογική, η αναγνώριση ότι τα ενορατικά μαθηματικά είναι μία ουσιωδώς αγλωσσική δραστηριότητα του νου που πηγάζει από την αντίληψη μιας κίνησης του χρόνου. Αυτή η αντίληψη του χρόνου μπορεί να περιγραφεί σαν τη διάσπαση μιας στιγμής της ζωής σε δύο διακριτά πράγματα, το ένα από τα οποία δίνει τη θέση του στο άλλο, αλλά διατηρείται στη μνήμη. Αν η δυάδα που γεννιέται έτσι απογυμνωθεί από κάθε ποιότητα, απομένει η κενή μορφή του κοινού υποστρώματος όλων των

αυτήν, διαχώριζε απολύτως τη γλώσσα και τη λογική από τα μαθηματικά κι όριζε ότι η ενόραση των πολλών-σαν-ένα (many-oneness) είναι η μόνη βάση της μαθηματικής δραστηριότητας - πράγματα που είχαν ήδη διατυπωθεί στο διδακτορικό του. Αναγνώρισε όμως τις περιορισμένες δυνατότητες ανάπτυξης μαθηματικών (μόνο κομμάτια των μαθηματικών με διακριτό χαρακτήρα όπως η αριθμητική και η άλγεβρα διασώζονταν): "Αφού το συνεχές μοιάζει να μένει έξω από την εμβέλειά της, θα φοβόταν κανείς σ' αυτό το στάδιο ότι στον Ενορατισμό δεν υπάρχει θέση για την ανάλυση." ([?], σελ.7). Και τότε παρουσίασε τη "*Δεύτερη Πράξη του Ενορατισμού*",[28] με την οποία εισήγαγε τις νέες του έννοιες, τις *ακολουθίες ελεύθερων επιλογών* (free choice sequences) και τα *είδη* (species). Μ' αυτές τις έννοιες ξεκίνησε την ενορατική ανακατασκευή της ανάλυσης.

4.1. **Η θεωρία των Brouwerιανών συνόλων.**

4.1.1. *Ακολουθίες επιλογών (choice sequences).* Οπως είδαμε, ο ρόλος των άπειρων ακολουθιών είναι κρίσιμος σε μια αριθμητική περιγραφή του συνεχούς. Ο Borel είχε διατυπώσει την παρατήρηση ότι ο μόνος τρόπος να φτιάξουμε το συνεχές, έχοντας στα χέρια μας μόνο ακολουθίες ρητών, χωρίς να επιβάλουμε την ύπαρξη πραγματικών αριθμών με αξιώματα, θα ήταν να υιοθετήσουμε σαν μαθηματικές οντότητες τις ακολουθίες που γεννιούνται με αυθαίρετες επιλογές αντικειμένων. Ομως σαν κατασκευαστικός (constructivist) μαθηματικός δίσταζε, αν και δεν απέρριπτε εντελώς την ιδέα:

> "...γνωρίζουμε ότι η καθαρά αριθμητική έννοια του συνεχούς απαιτεί να αποδεχτούμε τη νομιμότητα μιας αριθμήσιμης απειρίας διαδοχικών επιλογών. Αυτή η νομιμότητα μου φαίνεται ιδιαίτερα συζητήσιμη, όμως παρ' όλ' αυτά θα έπρεπε να κάνουμε τη διάκριση ανάμεσα σ' αυτή τη νομιμότητα και τη νομιμότητα μιας μη αριθμήσιμης απειρίας ... Η δεύτερη έννοια μου φαίνεται ... απολύτως χωρίς νόημα ..." ([?] και [?] τόμος 2, σελ.641).

Ο Brouwer, με τη Δεύτερη Πράξη του Ενορατισμού, δέχτηκε τις ακολουθίες ελεύθερων επιλογών σαν νόμιμα μαθηματικά αντικείμενα. [29] Οπως θα δούμε, βρήκε πως να χρησιμοποιεί αυτά τα άπειρα, ακαθόριστα αντικείμενα με κατασκευαστικό τρόπο, με το να τα βλέπει σα να έχουν δύο κομμάτια: ένα πεπερασμένο, ήδη κατασκευασμένο κομμάτι, που επιτρέπει να γίνεται γνήσια κατασκευαστική χρήση της άπειρης ακολουθίας σε ορισμένες περιστάσεις, κι ένα άπειρο, απροσδιόριστο κομμάτι που κάνει

δυάδων. Και είναι αυτό το κοινό υπόστρωμα, αυτή η κενή μορφή, που είναι η βασική ενόραση των μαθηματικών. ([?], σελ.4)

[28] *Η Δεύτερη Πράξη του Ενορατισμού.* Η αποδοχή δύο τρόπων δημιουργίας νέων μαθηματικών οντοτήτων: πρώτα με τη μορφή άπειρων ακολουθιών από μαθηματικές οντότητες που έχουν ήδη δημιουργηθεί, οι οποίες συνεχίζονται περισσότερο ή λιγότερο ελεύθερα (έτσι ώστε, για παράδειγμα, άπειρα δεκαδικά κλάσματα που ούτε έχουν ακριβείς τιμές ούτε καμία εγγύηση ότι κάποτε θα αποκτήσουν ακριβείς τιμές να γίνονται αποδεκτά)· δεύτερον, με τη μορφή των μαθηματικών ειδών (species), δηλαδή ιδιοτήτων που υποτίθενται για μαθηματικές οντότητες που έχουν ήδη δημιουργηθεί, που ικανοποιούν τη συνθήκη ότι αν ισχύουν για μια κάποια μαθηματική οντότητα, ισχύουν επίσης και για όλες τις μαθηματικές οντότητες που έχουν οριστεί να είναι 'ίσες' μ' αυτήν, όπου οι ορισμοί της ισότητας πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες της συμμετρίας, της ανακλαστικότητας και της μεταβατικότητας. ([?], σελ.8)

[29] Στην υιοθέτηση αυτής της έννοιας εκφράστηκε η καντιανής προέλευσης άποψή του ότι οι μαθηματικές κατασκευές είναι εσωτερικά, ελεύθερα δημιουργήματα του νου του *δημιουργούντος υποκειμένου* (creating subject), οπτική που επηρέασε την επιχειρηματολογία του.

δυνατή τη γένεση ολόκληρου του συνεχούς, καθώς ξεφεύγει από τους περιορισμούς που θα επιβάλλονταν από οποιοδήποτε είδος ορισιμότητας.

4.1.2. *Οι νέες έννοιες συνόλων.* Η καινούργια ματιά του Brouwer στα θεμέλια των μαθηματικών παρουσιάστηκε στο άρθρο του 1918 "*Θεμελίωση της Συνολοθεωρίας ανεξάρτητα από τον λογικό νόμο του αποκλειομένου τρίτου. Μέρος Πρώτο: Γενική Συνολοθεωρία.*" [?]. Εκεί, αντί για τα σύνολα του Cantor, προτείνονται δύο εναλλακτικές έννοιες σαν βάση για την ανάλυση, ο *ιστός* (Menge, spread)[30] και το *είδος* (species).

Είδος: το σύνολο σαν ιδιότητα. Το είδος είναι συγγενικό στην πραγματικότητα με το σύνολο όπως συλλαμβάνεται στα κλασικά μαθηματικά. Ενα είδος είναι μία ιδιότητα, αλλά μία ιδιότητα "που υποτίθεται για μαθηματικές οντότητες που έχουν προηγουμένως δημιουργηθεί", και είναι συμβατό με την έννοια ισότητας (γενικά μια σχέση ισοδυναμίας) των θεωρούμενων μαθηματικών οντοτήτων. Το ότι μία μαθηματική οντότητα έχει μια ιδιότητα (οπότε "ανήκει στο είδος"), βεβαιώνεται κι αυτό από μία κατασκευή· το είδος λοιπόν νοείται σαν μία κατασκευή *μέσα* σε μία κατασκευή. Δύο είδη είναι ίσα "αν για κάθε στοιχείο του καθενός ένα στοιχείο του άλλου ίσο μ' αυτό μπορεί να υποδειχθεί". Με τον ορισμό αυτόν του είδους, αποφεύγονται τα προβλήματα της μη κατηγορηματικότητας και της αυτοαναφοράς: "ένα είδος μπορεί να είναι στοιχείο ενός άλλου είδους, ποτέ όμως στοιχείο του εαυτού του!" διαπιστώνει ο ίδιος ο Brouwer ([?], σελ.8).

Ιστός: το σύνολο σαν νόμος. Ομως ποιες είναι οι μαθηματικές οντότητες που μπορεί να είναι στοιχεία των ειδών, εκτός από τους φυσικούς αριθμούς; Η γένεση των μαθηματικών οντοτήτων προκύπτει από τη μαθηματική δραστηριότητα που αποτυπώνεται στη ριζικά καινούργια έννοια συνόλου, τον ιστό. Σ' αυτήν ακριβώς την έννοια είναι που αξιοποιείται η αποδοχή των ακολουθιών ελεύθερων επιλογών. Κάθε στοιχείο ενός ιστού κατασκευάζεται σταδιακά: σε κάθε στάδιο διαλέγουμε, υπακούοντας σε κάποιους περιορισμούς, ακόμα ένα κομμάτι του στοιχείου, φτιάχνοντας έτσι μια καλύτερη προσέγγισή του. Συγκεκριμένα:

Ενας ιστός δημιουργείται i) με διαδοχικές επιλογές φυσικών αριθμών· κάθε επιλογή εξαρτάται από τις προηγούμενες, και γίνεται είτε ελεύθερα είτε υπακούοντας σε κάποιους περιορισμούς, και ii) συσχετίζοντας μετά από κάθε επιλογή ένα αντικείμενο από ένα συγκεκριμένο προϋπάρχον αριθμήσιμο σύνολο. Οι περιορισμοί του i) και οι συσχετίσεις του ii) δίνονται από το *νόμο του ιστού* (spread law), στην πραγματικότητα ένα ζευγάρι νόμων, το *νόμο επιλογής* (choice law) (ο οποίος επίσης καθορίζει αν η διαδικασία θα τερματιστεί ή θα συνεχιστεί, και στη δεύτερη περίπτωση είναι αναγκαίο να υπάρχει τουλάχιστον μία επιτρεπτή επιλογή για το επόμενο βήμα)[31] και το *νόμο συσχέτισης.* Προσπαθώντας να περιγράψει τη φύση των 'νόμων', ο Brouwer σημειώνει: "...μπορούμε να πούμε ότι ένας νόμος ιστού παράγει μια *οδηγία*[32] σύμφωνα με την οποία ..." ([?], σελ.15).

[30] Ο Brouwer αρχικά χρησιμοποίησε τον όρο Menge, που όμως ήταν ταυτισμένος με τα σύνολα του Cantor, και αργότερα τον όρο spread (επέκταση, διάδοση). Ο όρος *ιστός* (αρχαία ελληνική λέξη (και) για τον αργαλειό) που διαλέξαμε, προέρχεται από μία αναλογία που χρησιμοποιεί σ' ένα αδημοσίευτο άρθρο του ο Wim Veldman, ίσως ο μοναδικός σύγχρονος μαθηματικός που κάνει μαθηματικά ακριβώς με τον τρόπο του Brouwer, για να περιγράψει τον καθολικό ιστό (universal spread), που θα ορίσουμε πιο κάτω.

[31] Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να θεωρούμε πως μόνο άπειρες ακολουθίες παράγονται από το νόμο του ιστού.

[32] "Υπογράμμιση" δικιά μας.

Τα *στοιχεία* του ιστού είναι οι ακολουθίες (άπειρες ή πεπερασμένες) των αντικειμένων που έχουν συσχετιστεί με κάθε ακολουθία επιλογών. Ετσι ένα στοιχείο μπορεί να παραμένει πάντοτε ημιτελές, πάντοτε δημιουργούμενο. Ο ιστός που δημιουργείται έτσι δεν θεωρείται ότι είναι η ολότητα των στοιχείων του, παρά ταυτίζεται με το νόμο της δημιουργίας του. Η περιγραφή της έννοιας του ιστού είναι περίπλοκη και μακριά, όμως ο Brouwer έλεγε ότι δεν μπορούσε να αποφύγει κάτι τέτοιο. Κατά καιρούς έκανε διάφορες τροποποιήσεις στις λεπτομέρειες του ορισμού που αφορούσαν για παράδειγμα τη φύση των επιβαλλόμενων περιορισμών.

Παρά το γεγονός ότι κάθε επιλογή και συνακόλουθη συσχέτιση γίνονται αποτελεσματικά και επομένως είναι αποκρίσιμο το αν μία πεπερασμένη ακολουθία επιλογών ή αντικειμένων υποψήφιων για συσχέτιση είναι επιτρεπτή, δεν συμβαίνει το ίδιο και για τις άπειρες ακολουθίες: μία ακολουθία ελεύθερων επιλογών δημιουργείται σε βήματα· αν σε κάποιο βήμα ο νόμος επιλογής καθορίζει ότι το πεπερασμένο κομμάτι που έχει ήδη δημιουργηθεί δεν υπακούει πια στους περιορισμούς, τότε βέβαια γνωρίζουμε ότι η ακολουθία δεν 'ανήκει' στον ιστό. Οσο όμως δεν συμβαίνει να απορρίπτεται, δεν μπορούμε ποτέ να είμαστε σίγουροι ότι αυτό δεν θα συμβεί σε κάποιο επόμενο βήμα, κι αυτό είναι το τίμημα της ελευθερίας στη δημιουργία της ακολουθίας.

Οι ιστοί είναι αντικείμενα πιο βασικά από τα είδη: ο ιστός παράγει τα στοιχεία του, ενώ το είδος έχει στοιχεία από πριν κατασκευασμένα, κι αυτό που χρειάζεται για μια μαθηματική οντότητα για ν' ανήκει σ' ένα είδος, είναι η ενορατική δικαιολόγηση ότι διαθέτει την ιδιότητα που προσδιορίζει το είδος.

4.1.3. *Οι ιστοί σαν δέντρα και μία τοπολογία γι' αυτούς.* Μπορούμε να σκεφτόμαστε τους ιστούς σαν δέντρα, με κόμβους τις πεπερασμένες ακολουθίες των συσχετισμένων αντικειμένων που αντιστοιχούν στις διαδοχικές επιλογές, και που όλα τους τα κλαδιά είναι άπειρα (κλαδί είναι μια ακολουθία της οποίας όλα τα αρχικά τμήματα ανήκουν στο δέντρο). Ο ίδιος ο Brouwer χρησιμοποιούσε την εικόνα των κόμβων όπως παραπάνω όταν περιέγραφε τους ιστούς.

Μ' ένα πολύ φυσιολογικό τρόπο μπορεί να οριστεί μία τοπολογία σ' έναν ιστό: θεωρώντας σαν σημεία τα άπειρα κλαδιά του ιστού (με την εικόνα του δέντρου) και παίρνοντας σαν βάση για την τοπολογία τα σύνολα $\mathcal{N}_u$, όπου $\mathcal{N}_u$ είναι το σύνολο των άπειρων κλαδιών με αρχικό τμήμα u.

4.1.4. *Παραδείγματα.* Δίνουμε τώρα τα δύο πιο σημαντικά παραδείγματα ιστών.

1. ο *καθολικός ιστός* (universal spread), που προκύπτει από το νόμο επιλογής που επιτρέπει την επιλογή οποιουδήποτε φυσικού αριθμού σε κάθε βήμα, και το νόμο συσχέτισης που συσχετίζει τετριμμένα μετά από κάθε επιλογή τον ίδιο τον αριθμό που έχει επιλεγεί. Μ' αυτό τον ιστό δημιουργούνται όλες οι ακολουθίες φυσικών αριθμών, κι έτσι το είδος των στοιχείων του είναι μη αριθμήσιμο. Εφοδιασμένος με την τοπολογία των αρχικών τμημάτων, γίνεται ο γνωστός χώρος Baire, κι έτσι είναι Borel-ισομορφικός (δηλαδή έχει ουσιαστικά την ίδια δομή από την άποψη της θεωρίας μέτρου) με το σύνολο $\mathcal{R}$ των παραδοσιακών πραγματικών αριθμών· είναι βέβαια (τοπολογικά) ομοιομορφικός με τους άρρητους αριθμούς. Αυτή η τόσο γενική και ελεύθερη διαδικασία που υπαγορεύεται από τον καθολικό ιστό συλλαμβάνει την ουσία της δημιουργίας του ενορατικού συνεχούς, και βασισμένοι σ' αυτήν, βάζοντας κάποιους όχι ουσιαστικούς περιορισμούς, μπορούμε να ορίσουμε πια τους πραγματικούς αριθμούς στα πλαίσια του ενορατισμού.

2. *πδ-ιστός* (fan)[33] είναι ένας ιστός πεπερασμένης διακλάδωσης. Οι πδ-ιστοί, που είναι συμπαγείς στην τοπολογία που ορίσαμε, παίζουν ιδιαίτερο ρόλο στην ανάπτυξη μιας θεωρίας της ανάλυσης, εξαιτίας του πιο προσδιορισμένου χαρακτήρα τους. Ενας πδ-ιστός με ξεχωριστή σημασία είναι ο δυαδικός ιστός, που δημιουργεί όλες τις άπειρες ακολυθίες από 0 και 1, ο οποίος με την τοπολογία των αρχικών τμημάτων, γίνεται ο σημαντικότατος χώρος του Cantor.

Το ενορατικό συνεχές και οι πραγματικοί αριθμοί είναι το επόμενο παράδειγμα, που δίνεται στη συνέχεια.

4.2. **Το ενορατικό συνεχές.**

4.2.1. *Ο ιστός των σημείων του συνεχούς και οι πραγματικοί αριθμοί.* Ας θεωρήσουμε[34] το είδος των δυαδικών κλασμάτων $a/2^n$, όπου a ακέραιος και n φυσικός, με τη συνηθισμένη τους διάταξη. Σ' αυτό το είδος, θεωρούμε τα κλειστά διαστήματα της μορφής $I_{m,n} = [m/2^n, (m+2)/2^n]$ και μία αρίθμηση των ζευγαριών φυσικών αριθμών $p_1, p_2, ...$ με $p_i = < r_i, s_i >$, και τον εξής ιστό: στο πρώτο βήμα επιτρέπεται η επιλογή οποιουδήποτε φυσικού αριθμού n και συσχετίζεται το διάστημα I_{r_n,s_n}· αν οι $a_1, ..., a_n$ έχουν επιλεγεί και το διάστημα $I_{r,s}$ έχει συσχετιστεί, τότε επιτρέπεται να επιλεγεί ο αριθμός k μόνο αν το I_{r_k,s_k} περιέχεται γνήσια στο $I_{r,s}$, και αν ο k επιλεγεί, τότε συσχετίζεται το διάστημα I_{r_k,s_k}. Τα στοιχεία αυτού του ιστού, αυτές οι επ' άπειρον παραγόμενες ακολουθίες κλειστών διαστημάτων με μήκη που συγκλίνουν στο 0, είναι *τα σημεία του συνεχούς.*[35]

Μία σχέση ισοδυναμίας ορίζεται τώρα για τα σημεία αυτά: δύο σημεία p και q *συμπίπτουν* αν κάθε διάστημα του p καλύπτει πλήρως ή μερικά κάθε διάστημα του q. Κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι ένα είδος που ονομάζεται *πυρήνας σημείων* (point core) κι ένας πραγματικός αριθμός ορίζεται να είναι ακριβώς αυτό. Το είδος αυτών των πυρήνων σημείων είναι τ*ο ενορατικό συνεχές.* Ο Brouwer έδωσε πολλές ανάλογες κατασκευές του συνεχούς, χρησιμοποιώντας για παράδειγμα ακολουθίες ρητών ή δυαδικά κλάσματα με κάποιες συνθήκες σύγκλισης. Ο Heyting έδωσε επίσης κάποιες κατασκευές αυτού του τύπου, χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό όνομα *γεννήτορες πραγματικών αριθμών* (real number generators) για τους αντίστοιχους πυρήνες σημείων. Αυτή η περιγραφή δίνει έναν ικανοποιητικό από πολλές πλευρές ορισμό των πραγματικών στα ενορατικά πλαίσια. Ομως οι διαφορές από τους πραγματικούς αριθμούς των κλασικών μαθηματικών παραμένουν μεγάλες, όπως φαίνεται από αυτά που ακολουθούν.

4.2.2. *Αναποκρισιμότητα της ισότητας.* Στο άρθρο του του 1930 με τίτλο "*Η δομή του συνεχούς*" [?], ο Brouwer εξέτασε βασικές ιδιότητες του συνεχούς, συγκρίνοντας το κλασικό συνεχές μ' αυτό που προέκυπτε από τις δικές του θεωρήσεις. Το πρώτο του συμπέρασμα ήταν ότι η ισότητα μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών *δεν* είναι αποκρίσιμη στην περίπτωση του ενορατικού συνεχούς. Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής: έστω $A(n)$ μία ιδιότητα αποκρίσιμη για κάθε n, για την οποία όμως δεν ξέρουμε αν ισχύει για κάθε n, όπως ας πούμε η εικασία του Goldbach (κάθε άρτιος

[33]Ο όρος *βεντάλια* έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για την απόδοση στα ελληνικά του *fan*.

[34]Από την εισαγωγή του Parsons στο [?].

[35]Μπορούμε να συγκρίνουμε αυτή τη διαδικασία με την *αρχή του εγκιβωτισμού*, ένα αξίωμα πληρότητας που εξασφαλίζει ότι η τομή κάθε ακολουθίας κλειστών εγκιβωτισμένων διαστημάτων με μήκη που συγκλίνουν στο 0 είναι μη κενή.

φυσικός είναι άθροισμα δύο πρώτων), οπότε $A(n)$ είναι η ιδιότητα ότι το $2n+2$ είναι άθροισμα δύο πρώτων. Εστω

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } \forall k \leq n\ A(k), \\ 1/k, & \text{αν } \neg A(k) \wedge k \leq n \wedge \forall m < k\ A(m). \end{cases}$$

Η ακολουθία που ορίζεται έτσι είναι προφανώς συγκλίνουσα, ορίζει επομένως έναν πραγματικό αριθμό, έστω r. Βλέπουμε ότι $r = 0$ αν και μόνο αν η $A(n)$ είναι αληθινή για κάθε n (αλλιώς $r = 1/k$ για το ελάχιστο k για το οποίο ισχύει η $\neg A(k)$). Κατά συνέπεια δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $r = 0$, όσο δε γνωρίζουμε την απάντηση στην εικασία του Goldbach.

4.2.3. *Ασθενή αντιπαραδείγματα.* Τα αντιπαραδείγματα του είδους που μόλις δώσαμε είναι χαρακτηριστικά στην επιχειρηματολογία του Brouwer, είναι αυτά που αποκαλούνται *ασθενή αντιπαραδείγματα.* Χρησιμοποιείται ένα πρόβλημα άλυτο μέχρι τη στιγμή που αυτός που επιχειρηματολογεί το επικαλείται, για να διαψευστούν κάποιες κλασικά έγκυρες προτάσεις. Είναι ασθενές, γιατί εξαρτάται κρίσιμα από ένα *συγκεκριμένο* άλυτο πρόβλημα, που κάποια μέρα θα μπορούσε να λυθεί. Ομως ο Brouwer πίστευε ότι πάντοτε θα υπάρχουν άλυτα μαθηματικά προβλήματα.

4.2.4. *Το συνεχές δεν μπορεί να διαταχθεί.* Ενα δεύτερο αποτέλεσμα ήταν η αποτυχία να βρεθεί μια γραμμική διάταξη του ενορατικού συνεχούς. Οι ρητοί διατάσσονται ολικά χωρίς πρόβλημα, αφού η σύγκρισή τους ανάγεται στη σύγκριση φυσικών. Για τους πραγματικούς όμως, κάποιους είναι δυνατόν βέβαια να τους συγκρίνουμε και να τους διατάξουμε μεταξύ τους· στην περιγραφή με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα για παράδειγμα, αν σε κάποιο βήμα της κατασκευής δύο πραγματικών p και q προκύψει ένα διάστημα του p αυστηρά στα αριστερά ενός διαστήματος του q, τότε μπορούμε να έχουμε $p < q$. Ετσι προκύπτει η *φυσική διάταξη* των πραγματικών, όπως την ονόμαζε ο Brouwer. Ομως πάλι με την επίκληση κάποιων ασθενών αντιπαραδειγμάτων, έδειξε ότι αυτή η διάταξη δεν μπορεί να είναι ολική. Ορισε τότε κάποια εκλέπτυνση αυτής της διάταξης, θεωρώντας σαν ισότητα τη σχέση σύμπτωσης που αναφέρθηκε στην κατασκευή των πραγματικών, θέτοντας

$$p \prec q \equiv \neg p > q \wedge p \neq q,$$

την οποία ονόμασε *εικονική διάταξη* (virtual order), για να καταλήξει και πάλι όμως στο συμπέρασμα ότι κι αυτή ήταν αδύνατο να επεκταθεί σε μία ολική διάταξη. Αξίζει να σημειώσουμε ότι, αν και στα ενορατικά πλαίσια δεν διαθέτουμε τη συγκρισιμότητα των πραγματικών, διάφορες ιδιότητες μπορούν να αποδειχθούν για τη φυσική διάταξη· το πιο χρήσιμο υποκατάστατο της συγκρισιμότητας είναι η ιδιότητα $p < q \to p < r \vee r < q$. Η αδυναμία διάταξης δεν είναι ένα "τεχνικό" πρόβλημα, είναι μάλλον επακόλουθο του γεγονότος ότι οι περισσότεροι πραγματικοί είναι τελικά άγνωστα αντικείμενα.

4.2.5. *Το μοναδιαίο συνεχές (unit continuum).* Αν στην κατασκευή των πραγματικών με εγκιβωτισμένα διαστήματα θέσουμε έναν περιορισμό στο πόσο μικρότερο μπορεί να είναι ένα διάστημα από το προηγούμενό του, τότε οι δυνατές επιλογές είναι πεπερασμένες και ο ιστός που προκύπτει είναι πδ-ιστός. Τα πράγματα μπορούν να κανονιστούν έτσι ώστε να παίρνουμε διαστήματα μόνο μέσα στο [0,1]. Η ισοδύναμα μπορούμε να θεωρήσουμε τον δυαδικό πδ-ιστό. Και στις δύο περιπτώσεις, ο Brouwer ονόμαζε *μοναδιαίο συνεχές* τον πδ-ιστό που ορίζεται, κι αυτό είναι το τυπικό ενορατικό συμπαγές συνεχές.

4.3. Τα βασικά θεωρήματα και οι υποκείμενες αρχές.

4.3.1. *Μη συνεχείς συναρτήσεις δεν υπάρχουν.* Η αναποκρισιμότητα της ισότητας έχει συνέπειες που δύσκολα θα δεχόταν ένας παραδοσιακός μαθηματικός. Εστω[36] f η συνάρτηση από τους πραγματικούς στους πραγματικούς με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \neq 0, \\ 0 & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

που κλασικά ορίζεται παντού και δεν είναι συνεχής στο 0. Ενορατικά όμως, η f δεν μπορεί να είναι ολική συνάρτηση: για τον πραγματικό αριθμό r του ασθενούς αντιπαραδείγματος που παρουσιάσαμε, όπως και για κάθε άλλο πραγματικό, έπεται από τη συνέχεια (με τη συνηθισμένη έννοια) ότι μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε προσέγγιση του $f(r)$, και από την υποτιθέμενη ολικότητα της συνάρτησης, μπορούμε να αποφασίσουμε αν $f(r) < 1$ ή $f(r) > 0$, κι έτσι να αποφασίσουμε αν $\neg r \neq 0$ ή $r \neq 0$, ή ισοδύναμα[37] αν $r = 0$ ή $r \neq 0$, που είναι αδύνατο· έτσι φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι η f δεν μπορεί να είναι μια ολική συνάρτηση.

Ενα άλλο εντυπωσιακό αποτέλεσμα που προκύπτει με παρόμοια επιχειρήματα είναι ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής δεν ισχύει ούτε κι αυτό.

4.3.2. *Το θεώρημα ομοιόμορφης συνέχειας.* Σε αντίθεση με αυτά τα αρνητικά συμπεράσματα, ο Brouwer έφτασε σ' ένα πολύ ισχυρό αποτέλεσμα, ανάλογο με το κλασικό θεώρημα ότι οι συναρτήσεις που είναι συνεχείς σ' ένα συμπαγή χώρο είναι ομοιόμορφα συνεχείς, μόνο που στην ενορατική εκδοχή, οι μόνες συναρτήσεις που υπάρχουν είναι συνεχείς:

Θεώρημα ομοιόμορφης συνέχειας. Κάθε ολική συνάρτηση που ορίζεται στο μοναδιαίο συνεχές είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Στην πραγματικότητα ο Brouwer έφτασε στο αποτέλεσμα αυτό μάλλον οδηγούμενος από τη διαίσθησή του παρά με καθαρά μαθηματικά επιχειρήματα. Ο Hermann Weyl είπε τα εξής σε κάποια διάλεξή του, υπερασπιζόμενος το συνεχές του Brouwer: "Είναι σαφές ότι δεν μπορεί κανείς να εξηγήσει την έννοια της 'συνεχούς συνάρτησης σ' ένα φραγμένο διάστημα' χωρίς να περιλάβει την 'ομοιόμορφη συνέχεια' και την ιδιότητα του φραγμένου στον ορισμό. Πάνω απ' όλα, δεν μπορεί να υπάρξει άλλη συνάρτηση σ' ένα συνεχές εκτός από τις συνεχείς συναρτήσεις". ([?], σελ. 379). Ο Brouwer διάβασε κι επιδοκίμασε έντονα αυτές τις παρατηρήσεις. Για πολλά χρόνια προσπαθούσε να βρει μια ικανοποιητική απόδειξη για το θεώρημα αυτό. Στο άρθρο του "*On the domains of definition of functions*" του 1927 [?] δίνεται η πιο πλήρης παρουσίαση των επιχειρημάτων του. Η αξία αυτής του της προσπάθειας βρίσκεται εκτός των άλλων και στο γεγονός ότι μέσα στην απόδειξη, κυρίως στην τελική της εκδοχή, χρησιμοποιούνται καθαρά κι έτσι γίνονται ορατές, οι δύο χαρακτηριστικές αρχές της ενορατικής ανάλυσης που γι' αυτές θα μιλήσουμε πιο κάτω, αν και όχι ρητά σαν αρχές, παρά μόνο σαν φυσιολογικές απόρροιες της ενορατικής οπτικής.

4.3.3. *Το θεώρημα της βεντάλιας (Fan Theorem).* Το θεώρημα ομοιόμορφης συνέχειας ήρθε σαν συνέπεια του θεωρήματος της βεντάλιας, όπως ο Brouwer το αποκαλούσε.

[36] Το παράδειγμα είναι από το [?] τόμος 1, σελ.14.

[37] Η ισοδυναμία των $\neg r \neq 0$ και $r = 0$ δεν είναι καθόλου προφανής· έχουμε ότι η ισότητα $r = 0$ είναι της μορφής $\forall n\ A(n)$, και το $A(n)$ είναι αποκρίσιμο άρα ευσταθές για τη διπλή άρνηση και επιπλέον ισχύει ενορατικά η συνεπαγωγή $\neg\neg\forall n A(n) \to \forall n \neg\neg A(n)$.

Το θεώρημα της βεντάλιας. Αν σε κάθε στοιχείο α ενός πδ-ιστού αποδίδεται ένας αριθμός b_α, τότε μπορεί να βρεθεί ένας αριθμός z τέτοιος ώστε ο b_α να καθορίζεται πλήρως από τις πρώτες z τιμές του α.

Αυτή η εκδοχή του θεωρήματος δεν ισχύει κλασικά, η απόδειξή της χρησιμοποιεί την (κλασικά σωστή) ανάστροφη επαγωγή αλλά και την κλασικά εσφαλμένη ενορατική αρχή[38] της συνέχειας· είναι η μορφή που ο Brouwer προτιμούσε.

Μία διαφορετική εκδοχή του θεωρήματος αποδεικνύεται μόνο από την αρχή της ανάστροφης επαγωγής και είναι κλασικά σωστή. Σ' αυτή την εκδοχή, το θεώρημα λέει ότι αν, για τον δοσμένο πδ-ιστό υπάρχει ένα σύνολο κόμβων B τέτοιο ώστε κάθε κλαδί α να συναντάει το B (ένα τέτοιο B λέγεται *φράγμα* (bar)), τότε υπάρχει ένας αριθμός z τέτοιος ώστε κάθε κλαδί να συναντάει το φράγμα σε μήκος το πολύ z. Αναφέρουμε και αυτή την εκδοχή, γιατί το Λήμμα του König (κάθε άπειρο δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης έχει ένα άπειρο κλαδί) είναι ένα κλασικό αντιστροφοαντίθετό της.

Οπως σημειώνει ο van Dalen στο [?], "είναι ένα ενδιαφέρον ιστορικό αξιοπερίεργο ότι το θεώρημα της βεντάλιας προηγήθηκε από το πολύ γνωστότερο αντιστροφοαντίθετό του: το λήμμα απείρου του König [König 1926] ... Το λήμμα απείρου δεν είναι κατασκευαστικά έγκυρο. Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι αυτό διαψεύδει τη δημοφιλή άποψη ότι οι κατασκευαστικές αποδείξεις και τα θεωρήματα είναι πάντα μεταγενέστερες βελτιώσεις κλασικών θεωρημάτων."

4.3.4. *Το θεώρημα του φράγματος (Bar Theorem).* Για να αποδείξει το θεώρημα της βεντάλιας, ο Brouwer έδωσε πρώτα μία περίπλοκη απόδειξη, που λίγο απείχε από μία *μεταμαθηματική* απόδειξη, αυτού που αργότερα αποκαλούσε *Θεώρημα του Φράγματος*, όπου εξέταζε τη δομή της απόδειξης προτάσεων συγκεκριμένων μορφών. Αργότερα όμως, όπως φαίνεται σε μία υποσημείωση στο άρθρο του 1927 [?], συνειδητοποίησε ότι αυτό που χρησιμοποιεί είναι στην πραγματικότητα μία αρχή επαγωγής κάποιου είδους. Μία διατύπωση αυτής της αρχής είναι η ακόλουθη:[39]

Θεώρημα του Φράγματος. Αν ο καθολικός ιστός περιέχει ένα φράγμα A, τότε για το σύνολο των κόμβων που παράγεται από τα i) $A \subset X$, (ii) αν όλοι οι διάδοχοι ενός κόμβου n βρίσκονται στο X, τότε $n \in X$, τότε έπεται ότι η κενή ακολουθία (η ρίζα του καθολικού ιστού) βρίσκεται στο X.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αυτή η αρχή δίνει τη δυνατότητα να αξιοποιηθούν ιδιότητες που έχουν οι ακολουθίες φυσικών αριθμών παρά τον ανολοκλήρωτο χαρακτήρα τους, στην περίπτωση που οι ιδιότητες αυτές μπορούν να διαπιστωθούν σε κάποιο πεπερασμένο στάδιο της διαδικασίας γένεσης της ακολουθίας. Σε κάθε περίπτωση βέβαια η υπόθεση της ύπαρξης ενός φράγματος στον καθολικό ιστό δεν είναι καθόλου τετριμμένη· για να το αντιληφθούμε αυτό, αρκεί να σκεφτούμε ότι το σύνολο των κόμβων όπου κάθε κλαδί συναντάει το φράγμα για πρώτη φορά μπορεί να είναι τόσο "μακρύ" όσο οποιοσδήποτε άπειρος αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Αν και η αρχή αυτή φαίνεται να συνδέεται στενά με τα ενορατικά μαθηματικά, συμβαίνει να είναι μία κλασικά έγκυρη αρχή.

4.3.5. *Η αρχή της συνέχειας.* Οταν ο Brouwer αποδείκνυε ότι ο καθολικός ιστός δημιουργεί μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, χρησιμοποίησε ένα καινούργιο επιχείρημα, εξαιρετικής απλότητας, αντί για το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor. Το επιχείρημα

[38] Οι αναφερόμενες αρχές θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

[39] Η διατύπωση είναι από το άρθρο του Troelstra [?].

ήταν το εξής: ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση από τον καθολικό ιστό στους φυσικούς αριθμούς, και έστω b η τιμή της ακολουθίας α. Κατασκευαστικά, αυτό το b θα πρέπει να υπολογίζεται από τις πρώτες y τιμές της α, για κάποιο y. Αλλά τότε η ακολουθία β με τους ίδιους πρώτους y όρους και διαφορετικό τον $y+1$-οστό, θα πάρει την ίδια τιμή με την α. Επομένως είναι αδύνατο να απεικονιστεί με 1-1 τρόπο ο καθολικός ιστός στους φυσικούς αριθμούς.

Η ουσία του επιχειρήματος αυτού είναι *η αρχή της συνέχειας*, η οποία έπαιξε κρίσιμο ρόλο στις αποδείξεις των προηγούμενων θεωρημάτων. Σύμφωνα με αυτήν, για να ορίζεται μία συνάρτηση σ' έναν ιστό, πρέπει η τιμή σε κάθε ακολουθία-όρισμα να καθορίζεται μόνο από ένα αρχικό τμήμα της ακολουθίας. Αυτός είναι ο τρόπος που η σύγκρουση ανάμεσα στην ακαθόριστη φύση των ακολουθιών επιλογών και τον κατασκευαστικό χαρακτήρα μιας συνάρτησης πάνω σ' αυτές λύθηκε από τον Brouwer. Ετσι, η αρχή αυτή εξασφαλίζει ότι κάθε ολική συνάρτηση είναι συνεχής. Μπορεί επίσης να γενικευτεί σε συναρτήσεις με τιμές ακολουθίες. Είναι η μοναδική γνήσια ενορατική αρχή των μαθηματικών του Brouwer, έρχεται σε αντίφαση με τα κλασικά μαθηματικά, κι έτσι τα μαθηματικά που βασίζονται σ' αυτήν είναι διαφορετικά, αποκλίνουν από τα κλασικά.

4.3.6. *Αλλες μαθηματικές αρχές.* Είναι βέβαιο ότι ο Brouwer έβλεπε το γενικό αξίωμα επιλογής σαν εξόχως μη κατασκευαστικό. Ομως διάφορες αριθμητικές μορφές του προκύπτουν με ευθύ τρόπο από το πως γίνονται αντιληπτές ενορατικά οι υπαρξιακές και καθολικές προτάσεις. Θα συζητήσουμε γι' αυτές στην παρουσίαση ενός τυπικού συστήματος που προτάθηκε για την ανάλυση του Brouwer.

4.4. $\mathcal{FIM}$**: ένα τυπικό σύστημα για την ενορατική ανάλυση.** Η αξιωματικοποίηση των ενορατικών μαθηματικών από τον Heyting στο κλασικό του έργο [?, ?, ?] περιλάμβανε και τη θεωρία συνόλων, με τρόπο όμως που, όπως παρατηρεί ο Kleene, εμπόδιζε τη σύγκριση με τα κλασικά μαθηματικά. Το έργο των Kleene και Vesley "The Foundations of Intuitionistic Mathematics" [?] που εκδόθηκε το 1965, ήταν το επιστέγασμα της έρευνας πολλών χρόνων. Εκεί εκτίθεται ένα τυπικό σύστημα για ένα κομμάτι των ενορατικών μαθηματικών, που περιλαμβάνει τη θεωρία συνόλων του Brouwer εκτός από τη θεωρία των ειδών (species) ανώτερης τάξης, αυτό που ο Kleene αποκαλεί ενορατική ανάλυση, το τυπικό σύστημα $\mathcal{FIM}$. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι η ίδια και για ένα τυπικό σύστημα για την κλασική ανάλυση. Αντίθετα με τα ενορατικά λογικά συστήματα και την αριθμητική Heyting, η ενορατική ανάλυση *δεν* αποτελεί υποθεωρία της κλασικής, αλλά μία διαφορετική θεωρία για την ανάλυση, πράγμα αναμενόμενο σύμφωνα με τα όσα εκθέσαμε. Το $\mathcal{FIM}$ όμως εμπεριέχει ένα υποσύστημα, το *βασικό σύστημα* $\mathcal{B}$, το οποίο αποτελεί το κοινό τμήμα της κλασικής και της ενορατικής ανάλυσης. Από το $\mathcal{B}$, με την προσθήκη του $\mathrm{X}10^c$ (της αρχής της διπλής άρνησης), προκύπτει το αντίστοιχο κλασικό σύστημα, ενώ με την προσθήκη ενός αξιώματος, που εκφράζει την κλασικά εσφαλμένη αρχή της συνέχειας, προκύπτει το ενορατικό σύστημα (για την ανάλυση) $\mathcal{FIM}$.

Η γλώσσα του $\mathcal{FIM}$ είναι μία εκδοχή πρωτοβάθμιας γλώσσας δύο ειδών με ισότητα, κατάλληλης για μία τυπική θεωρία για τις ακολουθίες επιλογών (συναρτήσεις απο το ω στο ω) και (αναδρομικά) συναρτησοειδή πάνω σ' αυτές: έχει ατομικές μεταβλητές δύο ειδών, αριθμητικές, a,b,c,...,x,y,z, ..., και συναρτησιακές, α,β,γ,..., καθώς και ορισμένες συναρτησιακές σταθερές, τις $\mathrm{f}_0, \ldots, \mathrm{f}_{24}$, για το μηδέν, τον επόμενο, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, αλλά και άλλες, όπως αυτές για τον προηγούμενο, το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης· κάθε μια τους έχει k_i αριθμούς και l_i συναρτήσεις απο το ω στο ω σαν ορίσματα, αντίστοιχα, και είναι όλες (πρωτογενώς) αναδρομικές. Η επιλογή αυτή δεν είναι μοναδική, έχει γίνει για ευκολία στην ανάπτυξη της θεωρίας από τον Kleene.[40] Ακόμη, στα σύμβολα της γλώσσας περιλαμβάνεται και το λ του Church.

Εκτός από τους *όρους*, που είναι οι τυπικές εκφράσεις του $\mathcal{FIM}$ για τους φυσικούς αριθμούς, στο σύστημα αυτό υπάρχουν και τυπικές εκφράσεις για (ολικές) συναρτήσεις από το ω στο ω, οι *συναρτητές* (functors). Οι δύο έννοιες ορίζονται ταυτόχρονα επαγωγικά:

(i) Οι αριθμητικές μεταβλητές είναι *όροι*.

(ii) Οι συναρτησιακές μεταβλητές είναι *συναρτητές*.

(iii) Για κάθε $i = 0, \ldots, 24$, αν $k_i = 1$ και $l_i = 0$, τότε ο f_i είναι *συναρτητής*.

(iv) Για κάθε $i = 0, \ldots, 24$, αν $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}$ είναι *όροι* και $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i}$ είναι *συναρτητές*, τότε ο $\mathrm{f}_i(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k_i}, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_{l_i})$ είναι *όρος*.

(v) Αν ο u είναι *συναρτητής* και ο t *όρος*, τότε ο $(\mathrm{u})(\mathrm{t})$ είναι *όρος*.

(vi) Αν η x είναι αριθμητική μεταβλητή και ο t *όρος*, τότε ο $\lambda \mathrm{x}\,\mathrm{t}$ είναι *συναρτητής*.

(vii) Μία έκφραση είναι *όρος* ή *συναρτητής* αν και μόνο αν προκύπτει από τα (i)– (vi).

Οι ατομικοί τύποι είναι και εδώ οι εκφράσεις της μορφής $\mathrm{s} = \mathrm{t}$, όπου ο s και ο t είναι όροι· η ισότητα συναρτητών όμως δεν είναι ατομικός τύπος, αλλά ορίζεται: $\mathrm{u} = \mathrm{v} \equiv \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{u}(\mathrm{x}) = \mathrm{v}(\mathrm{x}))$, όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στους u, v. Οι *τύποι* σχηματίζονται όπως συνήθως, με τη διαφορά ότι εδώ οι ποσοδείκτες χρησιμοποιούνται και για τις συναρτησιακές μεταβλητές, έτσι οι $\forall \alpha \mathrm{A}$, $\exists \alpha \mathrm{A}$ είναι τύποι.

Οι ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών ορίζονται όπως συνήθως, αλλά στους τελεστές που δεσμεύουν (αριθμητικές) μεταβλητές ανήκει τώρα και το λ του Church.

Οσο για τα αξιώματα και τους αποδεικτικούς κανόνες του συστήματος, πρώτα-πρώτα περιλαμβάνουν τα X1 - X12 και τους R1 - R3 (για τη γλώσσα του $\mathcal{FIM}$) καθώς και τα παρακάτω, με τις ανάλογες συνθήκες για την αντικαταστασιμότητα και τις δεσμεύσεις των μεταβλητών, όπου ο u είναι συναρτητής:

X13. $\forall \alpha\, \mathrm{A}(\alpha) \rightarrow \mathrm{A}(\mathrm{u})$.

X14. $\mathrm{A}(\mathrm{u}) \rightarrow \exists \alpha A(\alpha)$.

R4. Από τον $\mathrm{C} \rightarrow \mathrm{A}(\alpha)$, συμπεραίνουμε τον $\mathrm{C} \rightarrow \forall \alpha\, \mathrm{A}(\alpha)$.

R5. Από τον $\mathrm{A}(\alpha) \rightarrow \mathrm{C}$, συμπεραίνουμε τον $\exists \alpha\, \mathrm{A}(\alpha) \rightarrow \mathrm{C}$.

Τα αξιώματα της ισότητας XE1 - XE3 και τα αξιώματα της αριθμητικής XInd και XN1 - XN7 περιλαμβάνονται κι αυτά, όπου βέβαια οι x, y, z είναι αριθμητικές μεταβλητές. Τα αξιώματα που αφορούν συναρτήσεις είναι πρώτα-πρώτα οι ορισμοί των συναρτησιακών σταθερών $\mathrm{f}_0, \ldots, \mathrm{f}_{24}$, που είναι τύποι που αποδίδουν τους αντίστοιχους ρητούς ή αναδρομικούς ορισμούς, καθώς και τα:

XF1. $(\lambda \mathrm{x}\, \mathrm{r}(\mathrm{x}))(\mathrm{t}) = \mathrm{r}(\mathrm{t})$.

XF2. $\mathrm{a} = \mathrm{b} \rightarrow \alpha(\mathrm{a}) = \alpha(\mathrm{b})$.

XF3. $\forall \mathrm{x}\, \exists \alpha\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \alpha) \rightarrow \exists \alpha\, \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \lambda \mathrm{y}\, \alpha(2^{\mathrm{x}} \cdot 3^{\mathrm{y}}))$,

[40] Ο πλήρης κατάλογος των συναρτησιακών σταθερών βρίσκεται στο [?] και είναι ανοιχτός, καθώς αφήνεται η δυνατότητα να επεκτείνεται όταν η ανάπτυξη της θεωρίας το υποδεικνύει, σε συμφωνία εξ άλλου με το πνεύμα του Brouwer. Ετσι, στο [?] προστίθενται άλλες δύο.

όπου οι $\mathrm{r(x)}$, t είναι όροι, η x αριθμητική μεταβλητή αντικαταστάσιμη από τον t στον $\mathrm{r(x)}$, ο $\mathrm{A(x,\alpha)}$ τύπος με την x ελεύθερη για την α.

Το XF1 είναι η β-αναγωγή του λ-λογισμού· το XF3 είναι μία αρχή αριθμήσιμης επιλογής, που είναι ενορατικά αποδεκτή, όπως φαίνεται αν σκεφτούμε τον τρόπο που ερμηνεύονται ενορατικά οι ποσοδείκτες.

Για την περιγραφή και το χειρισμό των ακολουθιών επιλογών στο $\mathcal{FIM}$ χρησιμοποιούνται οι *αριθμοί ακολουθιών* (sequence numbers), που κωδικοποιούν αρχικά τμήματα ακολουθιών φυσικών αριθμών ως εξής: οι x πρώτες τιμές μίας ακολουθίας α δίνονται από το $\overline{\alpha}(x)$, όπου

$$\overline{\alpha}(0) = 1 \ \text{ και } \ \overline{\alpha}(x+1) = p_0^{\alpha(0)+1} \cdot \ldots \cdot p_x^{\alpha(x)+1},$$

όπου $p_0, p_1, \ldots$ οι πρώτοι αριθμοί στη φυσική τους διάταξη. Η κωδικοποίηση αυτή μπορεί να γίνει στο τυπικό σύστημα ανάλογα με την αριθμητική, κι ακόμη μπορεί να οριστεί το τυπικό κατηγόρημα $\mathrm{Seq(a)}$ που εκφράζει ότι ένας αριθμός είναι αριθμός ακολουθίας, καθώς και η πράξη $\mathrm{a * b = a \cdot \prod_{i<lh(b)} p_{lh(a)+i}^{(b)_i}}$[41] της παράθεσης (concatenation) ανάμεσα σε αριθμούς ακολουθιών. Μ' αυτά ουσιαστικά τα εργαλεία, γίνεται δυνατή η διατύπωση στο $\mathcal{FIM}$ των χαρακτηριστικών αρχών των μαθηματικών του Brouwer για τις ακολουθίες επιλογών.

Η μαθηματική αρχή που ο Brouwer προσπάθησε να αποδώσει με το Θεώρημα του Φράγματος, εισάγεται στο $\mathcal{FIM}$ με το Αξίωμα της Ανάστροφης Επαγωγής (Bar Induction):

$$\begin{aligned}
\mathcal{BI}: \quad & \mathrm{\forall a\,[\,Seq(a) \to R(a) \vee \neg R(a)\,] \ \wedge\ \forall\alpha\,\exists x\, R(\overline{\alpha}(x)) \ \wedge} \\
& \mathrm{\forall a\,[\,Seq(a) \wedge R(a) \to A(a)\,] \wedge} \\
& \mathrm{\forall a\,[\,Seq(a) \wedge \forall s\, A(a * 2^{s+1}) \to A(a)\,]} \\
& \to \mathrm{A(1)}.
\end{aligned}$$

Για την επιλογή αυτού του σχήματος από τον Kleene, μπορούμε να σημειώσουμε τα εξής:

Οι ιδιότητες των ακολουθιών επιλογών που ενδιαφέρουν στα ενορατικά πλαίσια, είναι εκείνες που διαπιστώνονται με βάση κάποιο αρχικό τμήμα της κάθε ακολουθίας επιλογών, είναι δηλαδή της μορφής $\exists x R(\overline{\alpha}(x))$, όπου $R(a)$ είναι αριθμητικό κατηγόρημα, αποκρίσιμο τουλάχιστον για τους αριθμούς ακολουθιών. Η $\mathcal{BI}$ εκφράζει την εξής αρχή επαγωγής για ιστούς (δέντρα) στους οποίους υπάρχει ένα (αποκρίσιμο) φράγμα: αν (i) η $A(a)$ είναι ιδιότητα που την έχουν οι αριθμοί ακολουθιών, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα $R(a)$ και (ii) η $A(a)$ διαδίδεται επαγωγικά, με την έννοια ότι, για κάθε αριθμό ακολουθίας a, αν ισχύει ήδη[42] η $A(a * 2^{s+1})$ για κάθε s, τότε ισχύει και η $A(a)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η $A(1)$, όπου το 1 είναι ο κωδικός της κενής ακολουθίας.

Η $R(a)$ παίζει το ρόλο του φράγματος· η μορφή αυτή του αξιώματος μεριμνά μόνο για την περίπτωση του καθολικού ιστού, όμως η έννοια του ιστού ορίζεται κι αυτή στο $\mathcal{FIM}$, και η γενικότερη αρχή αποδεικνύεται από αυτήν.

Το σημαντικό θεώρημα της Βεντάλιας, τυπικά διατυπωμένο, αποδεικνύεται στο $\mathcal{FIM}$ χρησιμοποιώντας την $\mathcal{BI}$.

[41] Το $\mathrm{lh(a)}$ εκφράζει το μήκος της ακολουθίας που κωδικοποιείται από το a και το $\mathrm{(a)_i}$ την i-προβολή.

[42] Με κατεύθυνση από το φράγμα *προς* τη ρίζα του δέντρου, απ' όπου και η ονομασία *ανάστροφη επαγωγή*.

Η $\mathcal{BI}$ αποδεικνύεται κλασικά (και χωρίς τον περιορισμό της αποκρισιμότητας για το $R(a)$, που δεν έχει στην περίπτωση αυτή νόημα)· μαζί με όλα τα προηγούμενα αξιώματα και κανόνες, αποτελεί το βασικό σύστημα $\mathcal{B}$.

Το επόμενο και τελευταίο αξίωμα εκφράζει την κλασικά εσφαλμένη αρχή της συνέχειας. Για τη διατύπωση της αρχής της συνέχειας στο $\mathcal{FIM}$, ο Kleene αναφέρει πως ο Brouwer, ήδη, μιλώντας για τον προσδιορισμό της τιμής b για κάποια συνάρτηση α, χρησιμοποίησε την έκφραση "*ο αλγόριθμος του νόμου συσχέτισης*". Παίρνοντας σοβαρά αυτή την έκφραση και με τα εξής επιχειρήματα:

πρώτον, ο αλγόριθμος υπολογισμού της τιμής b πρέπει (i) για κάθε αρχικό τμήμα $\alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)$ μιας ακολουθίας επιλογών α, να αποφασίζει αν επαρκούν οι τιμές αυτές για τον υπολογισμό του b· (ii) αν η απάντηση είναι "ναι", να υπολογίζει το b, και

δεύτερον, τα παραπάνω μπορούν να αποδοθούν από μία συνάρτηση τ, που δρα πάνω στους αριθμούς ακολουθιών $\overline{\alpha}(y)$ και: παραμένει 0 όσο ο αλγόριθμος δεν απαντάει "ναι", ενώ, την πρώτη φορά που θα δοθεί απάντηση "ναι", τότε θα γίνει $\tau(\overline{\alpha}(y)) = b{+}1$ (χωρίς πρόβλημα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, αμέσως μετά, η τ γίνεται 0, ώστε να ισχύει $\forall t\, \exists !\, y\, \tau(\overline{\alpha}(y)) > 0$),

ο Kleene πρότεινε την ακόλουθη τυπική μορφή της αρχής της συνέχειας (Brouwer's principle):

$$\begin{aligned}\mathcal{BP}: \quad & \forall\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{A}(\alpha,\beta) \rightarrow \exists\tau\forall\alpha\, [\forall \mathrm{t}\, \exists!\mathrm{y}\, \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) > 0\, \wedge \\ & \forall\beta\, [\forall \mathrm{t}\, \exists \mathrm{y}\, \tau(2^{\mathrm{t}+1} * \overline{\alpha}(\mathrm{y})) = \beta(\mathrm{t}) + 1 \rightarrow \mathrm{A}(\alpha,\beta)\,]\,].\end{aligned}$$

Η αρχή αυτή είναι εσφαλμένη για τα κλασικά μαθηματικά. Για παράδειγμα, στο [?] σελ. 84, δίνεται απ' αυτήν η τυπική απόδειξη του

$$\vdash \neg\forall\alpha(\forall \mathrm{x}\, \alpha(\mathrm{x}) = 0 \vee \neg\forall \mathrm{x}\, \alpha(\mathrm{x}) = 0),$$

που δείχνει και την αναποκρισιμότητα της ισότητας ακολουθιών επιλογών, και στη συνέχεια δίνεται μία τυπική απόδειξη της άρνησης της καθολικής κλειστότητας μίας ειδικής περίπτωσης της αρχής του ελάχιστου φυσικού αριθμού.

Εκτός από αυτά, στο τρίτο κεφάλαιο του [?] παρουσιάζεται από τον R.E.Vesley η ενορατική θεωρία του συνεχούς στα πλαίσια του τυπικού συστήματος $\mathcal{FIM}$. Ορίζονται οι πραγματικοί αριθμοί με την τυποποίηση της έννοιας των γεννητόρων πραγματικών αριθμών και αποδεικνύεται το θεώρημα ομοιόμορφης συνέχειας. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο, ο Kleene πραγματεύεται τυπικά το ζήτημα της διάταξης των πραγματικών. Ετσι ένα σημαντικό τμήμα των μαθηματικών του Brouwer απεικονίζεται ιδιαίτερα πιστά μέσα σ' αυτό το τυπικό σύστημα.

4.5. **Η ερμηνεία της συναρτησιακής πραγματοποίησης για το σύστημα $\mathcal{FIM}$.** Αναπτύσσοντας την ίδια βασική ιδέα της αριθμητικής πραγματοποίησης, στο ίδιο έργο ο Kleene δίνει μία ερμηνεία για την ενορατική ανάλυση, εξασφαλίζοντας πρώτα-πρώτα τη συνέπεια του συστήματος. Εδώ, έχουμε προτάσεις ας πούμε της μορφής $\exists\beta\, A(\beta)$, όπου η β είναι μία συναρτησιακή μεταβλητή, οπότε πρέπει να μπορεί να δοθεί μία συνάρτηση β και ο τρόπος να επαληθευτεί το $A(\beta)$. Τα κατάλληλα αντικείμενα για την πραγματοποίηση τύπων είναι τώρα, όχι οι φυσικοί αριθμοί, αλλά οι *αριθμητικές συναρτήσεις μίας (αριθμητικής) μεταβλητής.* Ο βασικός μηχανισμός που ο Kleene επινόησε είναι, σε αναλογία με την κωδικοποίηση των αναδρομικών συναρτήσεων μέσω φυσικών αριθμών, η κωδικοποίηση των (συνεχών) συναρτησοειδών $F : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ μέσω συναρτήσεων $\tau : \omega \rightarrow \omega$. Ετσι όρισε την μερική αναδρομική συνάρτηση $\{\tau\}[\alpha]$ δύο συναρτησιακών μεταβλητών τ και α, η οποία υπολογίζει το συναρτησοειδές που κωδικοποιείται από την τ στο όρισμα α.

Ο ορισμός της συναρτησιακής πραγματοποίησης είναι επαγωγικός και χρησιμοποιεί τα παραπάνω.[43] Η έννοια που ορίζεται είναι η

$$\epsilon\ r_{\Psi}\ \mathrm{E}: \text{ η } \epsilon \text{ πραγματοποιεί τον E ως προς } \Psi,$$

όπου $\epsilon : \omega \to \omega$, E τύπος, Ψ λίστα μεταβλητών που περιέχει όλες όσες εμφανίζονται ελεύθερες στον E και Ψ μία αποτίμηση σε αριθμούς και συναρτήσεις από το ω στο ω, για τις μεταβλητές της Ψ.[44]

1. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \mathrm{P}$, όπου P ατομικός $\Longleftrightarrow_{\mathrm{op}}$ ο P αληθεύει ως προς Ψ, δηλαδή ο P αληθεύει για τις τιμές που η Ψ αποδίδει στις μεταβλητές της Ψ. $\mathcal{R}_P$
2. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \Longleftrightarrow_{\mathrm{op}} (\epsilon)_0\ r_{\Psi}\ \mathrm{A}$ και $(\epsilon)_1\ r_{\Psi}\ \mathrm{B}$. $\wedge\mathcal{R}$
3. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \Longleftrightarrow_{\mathrm{op}}$ αν $(\epsilon(0))_0 = 0$ τότε $(\epsilon)_1\ r_{\Psi}\ \mathrm{A}$ και αν $(\epsilon(0))_0 \neq 0$ τότε $(\epsilon)_1\ r_{\Psi}\ \mathrm{B}$. $\vee\mathcal{R}$
4. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \mathrm{A} \to \mathrm{B} \Longleftrightarrow_{\mathrm{op}}$ για κάθε α $(: \omega \to \omega)$, αν $\alpha\ r_{\Psi}\ \mathrm{A}$ τότε $\{\epsilon\}[\alpha]\!\downarrow$ και $\{\epsilon\}[\alpha]\ r_{\Psi}\ \mathrm{B}$. $\to\mathcal{R}$
5. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \neg\mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\mathrm{op}}$ για κάθε α, ισχύει η άρνηση του $\alpha\ r_{\Psi}\ \mathrm{A}$ (ισοδύναμα, ανν $\epsilon\ r_{\Psi}\ (\mathrm{A} \to 1 = 0)$, λόγω των 4 και 1: δεν υπάρχει α ώστε $\alpha\ r_{\Psi}\ 1{=}0$, αφού $1{=}0$ πάντα ψευδής ατομικός τύπος). $\neg\mathcal{R}$
6. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\mathrm{op}}$ για κάθε x $(\in \omega)$, $\{\epsilon\}[x]\!\downarrow$ και $\{\epsilon\}[x]\ r_{\Psi,\,x}\ \mathrm{A}$, όπου x η τιμή του x. $\forall N\mathcal{R}$
7. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \exists \mathrm{x}\, \mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\mathrm{op}} (\epsilon)_1\ r_{\Psi,\,(\epsilon(0))_0}\ \mathrm{A}$, όπου $(\epsilon(0))_0$ η τιμή του x. $\exists N\mathcal{R}$
8. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \forall \alpha\, \mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\mathrm{op}}$ για κάθε α, $\{\epsilon\}[\alpha]\!\downarrow$ και $\{\epsilon\}[\alpha]\ r_{\Psi,\,\alpha}\ \mathrm{A}$, όπου α η τιμή του α. $\forall F\mathcal{R}$
9. $\epsilon\ r_{\Psi}\ \exists \alpha\, \mathrm{A} \Longleftrightarrow_{\mathrm{op}} \{(\epsilon)_0\}\!\downarrow$ και $(\epsilon)_1\ r_{\Psi,\{(\epsilon)_0\}}\ \mathrm{A}$, όπου $\{(\epsilon)_0\}$ η τιμή του α. $\exists F\mathcal{R}$

Ενας *κλειστός* τύπος E είναι *πραγματοποιήσιμος*, αν πραγματοποιείται από κάποια *γενική αναδρομική συνάρτηση* $\epsilon : \omega \to \omega$. Ενας *ανοιχτός* τύπος είναι *πραγματοποιήσιμος*, αν η καθολική του κλειστότητα είναι πραγματοποιήσιμος τύπος.

Το κατάλληλο θεώρημα εγκυρότητας ισχύει:
Θεώρημα.(Kleene). Εστω Γ (πεπερασμένη) λίστα τύπων και E τύπος. Τότε, αν $\Gamma \vdash_{\mathcal{FIM}} \mathrm{E}$ και οι τύποι της Γ είναι πραγματοποιήσιμοι, τότε και ο E είναι πραγματοποιήσιμος.

Πόρισμα. Το τυπικό σύστημα $\mathcal{FIM}$ είναι συνεπές.

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση της συναρτησιακής πραγματοποίησης, ο Kleene διατύπωσε την εικασία ότι, με την τυποποίηση της έννοιας αυτής καθώς και της (μοντελοθεωρητικής) απόδειξης της συνέπειας του $\mathcal{FIM}$, θα προέκυπτε μία μεταμαθηματική απόδειξη σχετικής συνέπειας του $\mathcal{FIM}$ ως προς το βασικό σύστημα

[43] Χρησιμοποιούνται επίσης και οι ορισμοί $(\epsilon)_i = \lambda t\ (\epsilon(t))_i$ για i = 0,1, και $\{\epsilon\}[x] = \{\epsilon\}[\lambda t\ x]$.

[44] Με $\downarrow$ συμβολίζουμε το "ορίζεται".

$\mathcal{B}$. Το 1969, στο έργο του "Formalized recursive functionals and formalized realizability" [?], παρουσίασε με εξαιρετική ευστοχία και λεπτομέρεια την τυποποίηση της θεωρίας των αναδρομικών συναρτησοειδών τύπου 2 και την αντίστοιχη τυπική έννοια συναρτησιακής πραγματοποίησης[45] καθώς και μίας παραλλαγής της, πράγμα που του επέτρεψε να επαληθεύσει την εικασία του, αλλά και να δείξει τις ιδιότητες της διάζευξης και της ύπαρξης, καθώς και μία μορφή του κανόνα του Church, για το $\mathcal{FIM}$:

Πόρισμα. (i) Αν $\vdash_{\mathcal{FIM}}$ $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ κλειστός τύπος, τότε $\vdash_{\mathcal{FIM}}$ A ή $\vdash_{\mathcal{FIM}}$ B.

(ii) Αν $\vdash_{\mathcal{FIM}}$ $\exists \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x})$, $\exists \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x})$ κλειστός τύπος, τότε, για κάποιο αριθμό x, $\vdash_{\mathcal{FIM}}$ $\mathrm{A}(\mathbf{x})$, όπου $\mathbf{x}$ το ψηφίο του x.

(iii) Αν $\vdash_{\mathcal{FIM}}$ $\exists \alpha\, \mathrm{A}(\alpha)$, $\exists \alpha\, \mathrm{A}(\alpha)$ κλειστός τύπος, τότε $\vdash_{\mathcal{FIM}}$ $\exists \alpha_{\mathrm{GR}(\alpha)} \mathrm{A}(\alpha)$, όπου $\mathrm{GR}(\alpha)$ είναι τυπικό κατηγόρημα που εκφράζει ότι η συνάρτηση που εκφράζεται από την α είναι γενική αναδρομική.

Ο Troelstra το 1973 χαρακτήρισε τη συναρτησιακή πραγματοποίηση χρησιμοποιώντας το σχήμα GC_1, μία γενίκευση της αρχής της συνέχειας $\mathcal{BP}$.[46]

4.6. **Σχετικοποιημένες και τροποποιημένες έννοιες πραγματοποίησης.** Ο Kleene σχετικοποίησε την αρχική έννοια της συναρτησιακής πραγματοποίησης με διάφορους τρόπους. Αν Φ είναι μία κλάση αριθμοθεωρητικών συναρτήσεων κλειστή για το " αναδρομική ως προς", τότε για $\Theta, \Psi \subseteq \Phi$ και $\varepsilon \in \Phi$ η έννοια "η ε Φ/*πραγματοποιεί*-Ψ/Θ *το* E" ορίζεται σαν "η ε πραγματοποιεί-Ψ *το* E" εκτός από το ότι στους κανόνες 4, 5 και 8, το α περιορίζεται στην Φ.

Τότε ο E είναι Φ/*πραγματοποιήσιμος*/Θ αν για κάποια ε αναδρομική ως προς Θ: η ε Φ/πραγματοποιεί-Ψ/Θ *το* $\forall$E. Το θεώρημα εγκυρότητας επεκτείνεται στις σχετικοποιημένες έννοιες. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμά του του δυαδικού πδ-ιστού του οποίου όλα τα αναδρομικά κλαδιά (αλλά όχι όλα του τα κλαδιά) είναι πεπερασμένα, και θεωρώντας ότι η $\Phi = \Theta$ είναι η κλάση όλων των γενικών αναδρομικών συναρτήσεων, ο Kleene έδειξε ότι ο Brouwer δεν θα μπορούσε να έχει αποδείξει το Θεώρημα του Φράγματος χωρίς να χρησιμοποιήσει στην απόδειξη την ανάστροφη επαγωγή.

Θεώρημα. (Kleene) Το αξίωμα σχήμα της ανάστροφης επαγωγής είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της ενορατικής ανάλυσης. Αν το "θεώρημα της βεντάλιας" αντικαταστήσει το σχήμα της ανάστροφης επαγωγής, τότε κι αυτό επίσης είναι ανεξάρτητο από τα άλλα αξιώματα.[47]

Στη συνέχεια θεώρησε ότι η $\Phi = \Theta$ είναι η κλάση Ξ όλων των αριθμητικών συναρτήσεων, η οποία είναι (κλασικά) κλειστή για τη γενική αναδρομικότητα και τον τελεστή άλματος (jump operation), και απέδειξε (κλασικά) ότι το θεώρημα της βεντάλιας και όλα τα αξιώματα του ενορατικού συστήματος *εκτός* από την ανάστροφη επαγωγή είναι Ξ/*πραγματοποιήσιμα*/Ξ . (Αργότερα, οι Howard και Kreisel [?] απέδειξαν ότι η ανάστροφη επαγωγή πράγματι μεταβάλλει την ενορατική αριθμητική· ο Troelstra [?] απέδειξε ότι το θεώρημα της βεντάλιας δεν έχει το ίδιο αποτέλεσμα.)

[45]Πρόκειται, όπως και στην αριθμητική περίπτωση, για μία μετάφραση, μέσω της οποίας σε κάθε τύπο E αντιστοιχεί ένας τύπος ε r E.

[46]GC_1 είναι το σχήμα $\forall \alpha(\mathrm{A}(\alpha) \to \exists \beta \mathrm{B}(\alpha, \beta)) \to \exists \sigma \forall \alpha(\mathrm{A}(\alpha) \to \exists \beta(\sigma|\alpha = \beta \wedge \mathrm{B}(\alpha, \beta)))$, όπου ο A είναι σχεδόν αρνητικός τύπος.

[47][?] Πόρισμα 9.9. Η κυκλικότητα στην "απόδειξη" του Brouwer του θεωρήματος του φράγματος αναλύεται στο Κεφάλαιο 6.

Ο Kreisel [?] πρώτος υπέδειξε ένα διαφορετικό είδος τροποποίησης της πραγματοποίησης (που αργότερα προσάρμοσε ο Kleene) για να αποδείξει ότι η αρχή του Markov είναι ανεξάρτητη από τα ενορατικά αξιώματα. Οι Kreisel και Kleene χρησιμοποίησαν ρητούς τύπους (types), όμως το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν χρησιμοποιηθούν υποδηλούμενοι (implicit) τύποι μέσω μίας έννοιας *συμφωνίας* (agreement). Ο Van Oosten [?] εξηγεί τη βασική ιδέα: "Κάθε τύπος έχει *δύο* σύνολα πραγματοποιητών (realizers), όπου οι *πραγματικοί* είναι υποσύνολο των *δυνάμει* πραγματοποιητών."

Για παράδειγμα, η ε *συμφωνεί με το* (agrees with) $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ αν, όποτε η σ *συμφωνεί με το* A, το $\{\varepsilon\}[\sigma]$ ορίζεται και *συμφωνεί με το* B. Αν F είναι μία συλλογή συναρτήσεων κλειστή για το "γενικά αναδρομική ως προς" και οι ελεύθερες μεταβλητές του $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ερμηνεύονται με αριθμούς και συναρτήσεις από την F, τότε η ε ${}^{\mathsf{F}}$*πραγματοποιεί το* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ως προς αυτή την ερμηνεία των μεταβλητών αν $\varepsilon \in \mathsf{F}$ και η ε συμφωνεί με το $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ και για κάθε $\sigma \in \mathsf{F}$: αν η σ ${}^{\mathsf{F}}$*πραγματοποιεί το* A ως προς την ερμηνεία, τότε το $\{\varepsilon\}[\sigma]$ ${}^{\mathsf{F}}$*πραγματοποιεί το* B ως προς την ερμηνεία.

Η απόδειξη ότι η ανάστροφη επαγωγή είναι ${}^{\mathsf{F}}$πραγματοποιήσιμη είναι πιο περίπλοκη από αυτήν για την πραγματοποίηση. Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι αν η σ ${}^{\mathsf{F}}$πραγματοποιεί το $\forall\alpha\exists!xR(\overline{\alpha}(x))$, τότε το $\{\sigma\}[\varphi]$ ορίζεται για *κάθε* φ από τη συμφωνία, και το $(\{\sigma\}[\varphi](0))_0 = x$ εξαρτάται μόνο από ένα πεπερασμένο αρχικό τμήμα της φ. Ομως κάθε περιοχή της φ περιέχει στοιχεία της F, και η υπόθεση για τη σ συνεπάγεται (με ένα έμμεσο επιχείρημα) ότι, αν $\overline{\psi}(x) = \overline{\varphi}(x)$ και $\psi \in \mathsf{F}$ τότε $(\{\sigma\}[\psi](0))_0 = x$ επίσης. Αυτό παρέχει τη βάση για τη διαισθητική ανάστροφη επαγωγή.

Για την ${}_{\mathrm{s}}$πραγματοποίηση του Kleene, η F είναι η κλάση όλων των συναρτήσεων. Για να δούμε ότι η αρχή του Markov δεν είναι ${}_{\mathrm{s}}$πραγματοποιήσιμη, υποθέτουμε ότι η σ ${}_{\mathrm{s}}$πραγματοποιεί το $\forall\alpha(\neg\forall x\neg(\alpha(x) = 0) \to \exists x(\alpha(x) = 0))$. Τότε το $\tau = \{\sigma\}[\lambda t.1]$ ${}_{\mathrm{s}}$πραγματοποιεί το $\neg\forall x\neg(\alpha(x) = 0) \to \exists x(\alpha(x) = 0)$ όταν το α ερμηνεύεται με $\lambda t.1$, και υπάρχει μία αναδρομική θ η οποία συμφωνεί με την υπόθεση, οπότε το $(\{\tau\}[\theta](0))_0 = x$ καθορίζεται από το $\overline{\lambda t.1}(z)$ για κάποιο z. Αν $\varphi(y) = 1$ για $y \leq x+z$ αλλά $\varphi(x+z+1) = 0$, τότε η θ ${}_{\mathrm{s}}$πραγματοποιεί την υπόθεση $\neg\forall x\neg(\alpha(x) = 0)$ όταν το α ερμηνεύεται με φ, αλλά το $\{\tau\}[\theta]$ δεν ${}_{\mathrm{s}}$πραγματοποιεί το συμπέρασμα.

Η σχετικοποιημένη εκδοχή αναπτύχθηκε στο [?] (με F την κλάση όλων των αναδρομικών συναρτήσεων) για να αποδειχθεί ότι το $\forall\alpha\neg\neg\mathrm{GR}(\alpha)$ είναι συνεπές με την ενορατική θεωρία και το Σχήμα του Vesley [?], από το οποίο έπονται αντιπαραδείγματα του δημιουργούντος υποκειμένου (creating subject) του Brouwer. Για άλλες εφαρμογές, παρατηρούμε πρώτα ότι η συνήθης συναρτησιακή πραγματοποίηση παρέχει μία κλασική απόδειξη ότι η ενορατική θεωρία $\mathcal{FIM}$ είναι συνεπής με την **PA**, εφόσον κλασικά κάθε *αριθμητική* περίπτωση του νόμου του αποκλειομένου τρίτου πραγματοποιείται από κάποια συνάρτηση.

Αν $\mathrm{A(x)}$ είναι οποιοδήποτε αριθμητικό κατηγόρημα με ελεύθερη μόνο την x, έστω $\mathsf{F}[\mathrm{A(x)}]$ η συλλογή όλων των συναρτήσεων που είναι κλασικά αναδρομικές ως προς την κύρια ερμηνεία του $\mathrm{A(x)}$. Τότε τα $\forall x(\mathrm{A(x)} \vee \neg \mathrm{A(x)})$ και $\forall\alpha\neg\neg\exists e\exists\beta[\forall x(\beta(x) = 0 \leftrightarrow \mathrm{A(x)})\ \&\ \forall x\exists y[\mathrm{T_1(e, x, \overline{\beta}(y))}\ \&\ \mathrm{U}(\overline{\beta}(y)) = \alpha(x))]]$ είναι ${}^{\mathsf{F}[A(x)]}$πραγματοποιήσιμα, και άρα συνεπή με το $\mathcal{FIM}$. Είναι επομένως δυνατό να ερμηνεύσουμε το κατασκευαστικά απροσδιόριστο μέρος του ενορατικού συνεχούς σαν κλασικά αναδρομικό ως προς το κατασκευαστικά προσδιορισμένο μέρος, το οποίο θα μπορούσε να περιέχει τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις αυθαίρετα πολύπλοκων αριθμητικών σχέσεων. Βέβαια, είναι αδύνατο να αποδώσουμε αριθμούς gödel (ή ακόμη και σχετικούς αριθμούς gödel) με συνεχή τρόπο, οπότε το $\neg\neg\exists e$ δεν μπορεί να αντικατασταθεί συνεπώς από το $\exists e$.

4.7. **Μια ματιά στο σήμερα και το αύριο.** Οι φιλοσοφικές του επιλογές ήταν το κίνητρο του Brouwer για την ενορατική ανακατασκευή των μαθηματικών. Ομως, σαν μια ειρωνεία της ιστορίας, το ενδιαφέρον για την ενορατική σκέψη (εκτός από αυτούς που συμμερίζονται ανάλογες φιλοσοφικές θέσεις) πηγάζει σήμερα κυρίως από τη λογική και την επιστήμη των υπολογιστών.

Η B-H-K ερμηνεία βρήκε μία ακριβή υλοποίησή της από τον Kleene στην έννοια της πραγματοποίησης, η οποία τη διασυνδέει με τη θεωρία των αναδρομικών συναρτήσεων· αλλά και σε συνδυασμό με τα αποδεικτικά συστήματα του Gentzen, οδήγησε στην αντιστοιχία Curry - Howard, που συσχετίζει τις αποδείξεις με λ-όρους και τελικά με προγράμματα. Στο ίδιο πλαίσιο εντάσσεται και η ενορατική θεωρία τύπων του Per Martin-Löf. Ο πολυμορφικός λ-λογισμός ή σύστημα F του Girard και ο λογισμός των κατασκευών των Coquand και Huet (πάνω στον οποίο σχεδιάστηκε η συναρτησιακή γλώσσα - prover (proof checker) Coq, με την οποία έγινε μεταξύ άλλων πρόσφατα (2004) επαλήθευση της λύσης του προβλήματος των 4 χρωμάτων), αποτελούν εφαρμογές των προηγουμένων. Η περιγραφή της εξέλιξης και των αλληλεπιδράσεων των ιδεών αυτών, διατυπώνεται εμπεριστατωμένα στο άρθρο "From constructivism to computer science" του A. S. Troelstra, [?].

Μία διαφορετική πηγή ενδιαφέροντος αποτέλεσε η θεωρία κατηγοριών, όπου βρέθηκε ότι σημαντικές δομές όπως οι τόποι, είναι μοντέλα της ενορατικής λογικής. Στο άρθρο [?] του J. van Oosten μπορεί να βρει κανείς μια σκιαγράφηση αυτής της γραμμής ανάπτυξης της θεωρίας.

Διάφορα λογικά και μαθηματικά συστήματα και σημασιολογίες αναπτύχθηκαν σε σχέση με την ενορατική λογική. Ενδεικτικά αναφέρουμε τη σημασιολογία Kripke καθώς και τις κατασκευαστικές εκδοχές της θεωρίας συνόλων Zermelo - Fraenkel, όπως του J. Myhill και του P. Aczel. Αλλά και την κατασκευαστική ανάπτυξη μεγάλου μέρους της ανάλυσης από τον E. Bishop και τη σχολή του, όπως και τα αναδρομικά κατασκευαστικά μαθηματικά της ρωσικής σχολής που συνδέεται με τον A. A. Markov.

Σε κάθε περίπτωση, τα ενορατικά μαθηματικά αποτελούν μία πλούσια πηγή μαθηματικών ιδεών· είτε μπορούν να αναπτύσσονται μέσα στα κλασικά μαθηματικά σαν ένα κομμάτι τους, είτε μπορούν να θεωρούνται σαν μία επέκταση των κλασικών μαθηματικών,[48] προσφέροντας διαφορετικούς ορισμούς και εκλεπτύνσεις των λογικών και μαθηματικών εννοιών, με ό,τι αυτό συνεπάγεται.

Βιβλιογραφια

[1] Benacerraf, P. and Putnam, H., *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice Hall 1964.

[2] Beth, E.W., *The foundations of mathematics*, North-Holland, Amsterdam 1959.

[3] Borel, E., *Sur les principes de la théorie des ensembles*, in G.Castelnuovo , ed., *Atti dei IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 6-11 Aprile 1908*, Vol.II, 15-17.

[4] Buss, S., ed., *Handbook of Proof Theory*, Elsevier, Amsterdam 1998.

[5] Brouwer, L. E. J., *On the foundations of mathematics*, English translation, in Heyting, ed., *L. E. J. Brouwer Collected Works, Vol 1*, 11-101.

[48] Σαν συγκεκριμένες περιπτώσεις μαθηματικής υλοποίησης αυτής της οπτικής αναφέρουμε τα [?, ?]

[6] Brouwer, L. E. J., *The untrustworthiness of the logical principles*, English translation, in Heyting, ed., *L. E. J. Brouwer Collected Works, Vol 1*, 102-104.

[7] Brouwer, L. E. J., *Intuitionism and formalism*, translated by A. Dresden, Bull. Amer. Math. Soc. 20 (1913), 81-96. Reprinted in Benacerraf and Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics*, 66-77.

[8] Brouwer, L. E. J., *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil: Allgemeine Mengenlehre*, in Heyting, ed., *L. E. J. Brouwer Collected Works, Vol 1*, 150-190.

[9] Brouwer, L. E. J., *On the domains of definition of functions*, English trans. in Van Heijenoort, ed., *From Frege to Gődel*, 446-463.

[10] Brouwer, L. E. J., *Die Struktur des Kontinuums*, in Heyting, ed., *L. E. J. Brouwer Collected Works, Vol 1*, 429-440.

[11] *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, edited by D. van Dalen, Cambridge University Press (1981)

[12] Dalen, D. van, *Mystic, Geometer, and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer*, Clarendon press, Oxford, 1999.

[13] Gentzen, G., *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Math. Zeitschrift 39 (1934-5), 176-210, 405-431.

[14] Gentzen, G., *Über das Verhältnis zwischen intuitionistischer und klassischer Logik*, accepted by Math. Annalen (1933) but withdrawn; published in Arch. Math. Logik 16 (1974), 119-132. English trans. in Szabo, M., ed., *Gentzen: Collected Papers*, North-Holland, Amsterdam (1969), 53-67.

[15] Glivenko, V., *Sur la logique de M. Brouwer*, Akadémie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences (5) 14 (1928), 225-228.

[16] Glivenko, V., *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Acad. Roy. Belg., Bull. Sci. (5) 15 (1929), 183-88. English translation (*On some points of the logic of Mr. Brouwer*) by A. Rocha in Mancosu, P., ed., *From Brouwer to Hilbert*, 301-305.

[17] Gödel, K., *Eine interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkúls*, Ergebnisse eines math. Kolloq. 4 (1933), 39-40.

[18] Heijenoort, J. van, ed., *From Frege to Gődel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Harvard University Press 1967.

[19] Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik* I, Sitzungsberichte der Preuss. Akad. von Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse (1930), 42-56. English translation (*The formal rules of intuitionistic logic*) in Mancosu, ed., *From Brouwer to Hilbert*, 311-327.

[20] Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik* II, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. (1930), 57-71.

[21] Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik* III, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. (1930), 158-169.

[22] Heyting, A., *Sur la logique intuitionniste*, Acad'emie Royale de Belgique, Bull. 16 (1930), 957-63. English trans. (*On intuitionistic logic*) by A. Rocha in Mancosu, ed., *From Brouwer to Hilbert*, 306-310.

[23] Heyting, A., Ed., *L. E. J. Brouwer Collected Works, Vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland/American Elsevier 1975.

[24] Hilbert, D. and Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, Vol. 1 (1934), Vol. 2 (1939).

[25] Hesseling, D., *Gnomes in the Fog. The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*, Birkhaüser Verlag 2003.

[26] Howard, W. and Kreisel, G., *Transfinite induction and bar induction of types zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis*, Jour. Symbolic Logic 31 (1966) 325-358.

[27] Kino, A., Myhill, J. and Vesley, R., eds., *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[28] Kleene, S. C., *On the interpretation of intuitionistic number theory*, Jour. Symbolic Logic 10 (1945), 109-124.

[29] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1952.

[30] Kleene, S. C. and Vesley, R. E., *The Foundations of Intuitionistic Mathematics, Especially in Relation to Recursive Functions*, North-Holland, Amsterdam, 1965.

[31] Kleene, S. C., *Formalized recursive functionals and formalized realizability*, Memoirs, no. 89, American Mathematical Society, 1969.

[32] Kolmogorov, A., *On the principle of excluded middle*, translated from the Russian in van Heijenoort, ed. *From Frege to Gödel*, 414-437.

[33] Kolmogorov, A., *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, Math. Zeitschrift 35 (1932), 58-65. English trans. (*On the interpretation of intuitionistic logic*) in Mancosu, ed., *From Brouwer to Hilbert*, 328-334.

[34] Kreisel, G., *The non-derivability of* $\neg(x)A(x) \to (Ex)\neg A(x)$, *A primitive recursive, in intuitionistic formal systems*, Jour. Symb. Logic 23 (1958), 456-457.

[35] Mancosu, P., ed., *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, 1998.

[36] Moschovakis, J. R., *Can there be no non-recursive functions*, Jour. Symb. Logic 36 (1971), 309-315.

[37] Moschovakis, J. R., *A classical view of the intuitionistic continuum*, Annals of Pure and Applied Logic 81 (1996) 9-24.

[38] Moschovakis, J. R., *Classical and constructive hierarchies in extended intuitionistic analysis*, Jour. Symb. Logic 64 (2003), 1015-1043.

[39] Nelson, D., *Recursive functions and intuitionistic number theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947), 307-368.

[40] Oosten, J. van, *Realizability: a historical essay*, Math. Struct. Comp. Sci 12 (2002), 239-263.

[41] Vesley, R. E., *A palatable substitute for Kripke's schema*, in Kino, Myhill, Vesley, ed., *Intuitionism and Proof Theory*, 197-207.

[42] Stigt, W. P. van, *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam (1990).

[43] Peano, G., *The principles of arithmetic, presented by a new method*, English trans. in Van Heijenoort, ed., *From Frege to Gódel*, 83-97.

[44] Troelstra, A. S., *The scientific work of A. Heyting*, Compositio Mathematica 20 (1968), 3 - 12.

[45] Troelstra, A. S., *Note on the fan theorem*, Jour. Symb. Logic 39 (1974), 584-596.

[46] Troelstra, A. S., *History of constructivism in the 20th century*, Univ. Amsterdam preprint ML-91-05, 1991.

[47] Troelstra, A. S., *Realizability*, in S. Buss, ed., *Handbook of Proof Theory*, 407-473.

[48] Troelstra, A. S., *From Constructivism to Computer Science*, Theoretical Computer Science 211, 233–252. Text of the lecture held on occasion of receiving the F.L. Bauer-prize. Preprint: ILLC Research report CT-96-02.

[49] Troelstra, A. S. and Dalen, D. van, *Constructivism in Mathematics* I and II, North-Holland, Amsterdam, 1988.